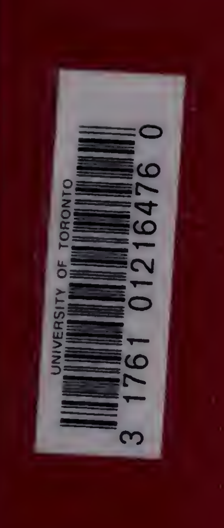

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01216476 0

J. HADAMARD

ESSAI

SUR

L'ÉTUDE DES FONCTIONS

DONNÉES PAR LEUR DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

ÉTUDE

SUR

LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ENTIÈRES

ET EN PARTICULIER

D'UNE FONCTION CONSIDÉRÉE PAR RIEMANN

(Mémoire couronné par l'Académie des Sciences)

(Extraits du Journal de Mathématiques pures et appliquées. — 4e Série, Tomes VIII et IX, 1892-1893)

ESSAI SUR L'ÉTUDE DES FONCTIONS

DONNÉES

PAR LEUR DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR.

INTRODUCTION.

Le développement de Taylor rend d'importants services aux mathématiciens, en raison de sa grande généralité. Lui seul, en effet, permet de représenter une fonction analytique quelconque, à certains cas singuliers près.

Depuis les travaux d'Abel et de Cauchy, on sait qu'à toute fonction régulière dans un certain cercle correspond un développement de Taylor, et réciproquement. C'est même ce développement que M. Weierstrass, et, en France, M. Méray emploient pour définir la fonction.

Un point a étant donné au hasard, on pourra, en général, former une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-a$ et qui représentera notre fonction dans le voisinage du point a. Il pourra y avoir exception pour certaines positions particulières du point a. C'est à ces points particuliers que l'on donne le nom de *points singuliers*.

On peut donc dire que se donner une fonction analytique non singulière au point $x=0$, c'est se donner une suite de coefficients a_1,

$a_2, \ldots, a_m, \ldots$, tels que la série $\sum a_m x^m$ ne soit pas toujours divergente. Cette série donnera la fonction dans l'intérieur de son cercle de convergence, et d'ailleurs une fonction ainsi donnée est parfaitement déterminée, si du moins, avec la valeur de la variable, on se donne le chemin par lequel on y aboutit.

C'est, par exemple, sous cette forme que le théorème de Briot et Bouquet fournit les intégrales d'un système d'équations différentielles.

Mais, si ce mode de représentation est très utile pour démontrer l'existence des intégrales, son emploi est très limité au point de vue de l'étude de ces mêmes intégrales. Le développement de Taylor, en effet, ne met pas en évidence les propriétés de la fonction représentée et semble même les masquer complètement.

Cependant on connaît déjà des circonstances où ce développement peut fournir de précieux renseignements difficiles à obtenir par d'autres moyens. On sait, en effet, les remarquables propriétés arithmétiques démontrées par Eisenstein et M. Tchebicheff sur les séries qui représentent des fonctions algébriques ou exprimables par la combinaison de fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires en nombre fini.

J'ai étudié la question à un point de vue différent, celui qu'indique la théorie générale des fonctions, et d'après lequel le premier problème qui se pose est la recherche des points singuliers. Ce problème est d'ailleurs intimement lié à celui de la continuation de la fonction en dehors du cercle de convergence.

Le développement de Taylor ne définit une fonction qu'à l'intérieur d'un certain cercle, à savoir le plus petit qui ait pour centre l'origine et qui passe par un ou plusieurs points singuliers. Si a désigne l'affixe d'un point situé sur le rayon qui va de l'origine à un de ces points singuliers, en ordonnant notre série, non plus suivant les puissances de x, mais suivant celles de $x - a$, le cercle de convergence de cette nouvelle série sera compris entièrement dans l'ancien.

Il n'en sera pas de même si le rayon qui va de l'origine au point $x = a$ coupe la circonférence primitive en un point ordinaire, et, dans ce cas, la nouvelle série permettra de calculer la fonction pour des valeurs

de x qui rendaient l'ancienne divergente. Si l'on veut étudier le prolongement de la fonction en dehors du cercle de convergence, il est donc important de déterminer les points critiques situés sur ce cercle. C'est cette détermination qui fait le principal objet du présent travail.

Il existe, à cet égard, une Note de M. Lecornu, insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹). D'après M. Lecornu, l'affixe du point singulier est la limite vers laquelle tend le rapport de deux coefficients consécutifs, lorsqu'on s'éloigne de plus en plus dans la série. Malheureusement la démonstration donnée par l'auteur est défectueuse, et nous verrons qu'il y a de grandes réserves à faire sur le théorème lui-même.

Quant à la méthode qui m'a servi dans cette recherche, les principes sur lesquels elle repose sont ceux qu'a employés M. Darboux dans son Mémoire bien connu : *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (²), dans un but inverse, il est vrai. Partant de certaines séries dont les points singuliers sont connus, M. Darboux en tire des conclusions relatives aux coefficients de ces séries. Mais le principe fondamental du Mémoire, énoncé par son auteur de la façon suivante : « La recherche de la partie principale des coefficients de la » série dépend de la manière dont la fonction devient infinie sur le » cercle de convergence », est celui-là même qui peut servir à l'étude des points singuliers.

J'ai divisé ce travail en trois Parties :

Dans la première, après avoir introduit une notion préliminaire indispensable pour la suite, je détermine d'une façon générale le rayon de convergence. Les résultats obtenus conduisent immédiatement à un criterium permettant de reconnaître dans certains cas la présence d'un ou plusieurs points singuliers.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude des discontinuités polaires. Lorsque la fonction n'a sur le cercle de convergence que de telles discontinuités, on peut la prolonger analytiquement et la représenter dans tout cercle où elle est méromorphe.

Dans la troisième Partie, je définis ce qu'on peut appeler l'*ordre*

(¹) Séance du 7 février 1887.

(²) *Journal de Liouville*, 3e série, t. IV

d'une fonction sur son cercle de convergence et en un point de ce cercle, et j'étudie les points singuliers en les classifiant d'après leur ordre. Lorsque cet ordre reste fini, on peut, dans des cas assez étendus, trouver les points singuliers, et, dans tous les cas, calculer la fonction en tout point ordinaire du cercle de convergence ([1]).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Nous aurons à nous fonder, dans ce qui va suivre, sur quelques principes simples relatifs aux suites infinies, et que je vais résumer tout d'abord.

Soit la suite

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

où u_0, u_1, ..., u_m, ... désignent des nombres réels, mais quelconques d'ailleurs.

Il peut arriver, comme premier cas, que cette suite renferme des termes supérieurs à tout nombre donné; ou encore, que tous les termes aillent en augmentant indéfiniment par valeurs négatives.

Écartons pour le moment ces deux hypothèses. Nous voyons qu'il y aura lieu de répartir les nombres réels, d'après leurs relations de grandeur avec les quantités u_m d'indice très grand, en deux catégories. Un nombre A sera mis dans la classe supérieure si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (1) sont plus petits que A; au contraire, un nombre B appartiendra à la classe inférieure si notre suite contient des termes de rang aussi éloigné qu'on veut, et qui surpassent B.

Si A est un nombre de la classe supérieure, il est clair que tous les nombres supérieurs à A appartiennent à la même classe; pareillement, si le nombre B fait partie de la classe inférieure, on peut en dire autant de tous les nombres moindres que B.

([1]) Plusieurs des résultats contenus dans le présent travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences (séances du 23 janvier 1888 et du 8 avril 1889).

Or c'est un fait bien connu que, dans ces conditions, il existe un nombre l servant de séparation entre les deux classes, en sorte que la première se compose des nombres plus grands que l; la seconde, des nombres plus petits que l (1). Pour déterminer ce nombre, on pourra, par exemple, commencer par faire prendre à un entier la série des valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Il arrivera un moment où cet entier variable passera de la classe inférieure dans la supérieure. Soient a_1 et a_1+1 les deux nombres entiers consécutifs qui appartiennent ainsi à des catégories différentes. On divisera l'intervalle (a_1, a_1+1) en n parties égales et l'on trouvera deux nouveaux nombres a_2, $a_2+\frac{1}{n}$, différant de $\frac{1}{n}$ et dont l'un est un nombre B, l'autre un nombre A. On partage l'intervalle compris entre ces deux nombres en n parties égales; et poursuivant ainsi indéfiniment, on formera une série d'intervalles compris les uns dans les autres et de plus en plus petits. D'après un théorème connu, les nombres obtenus par ce procédé sont les valeurs approchées d'une même quantité, laquelle répond manifestement à notre objet.

Cette quantité l, telle que, pour toute valeur positive de ε, $l+\varepsilon$ appartienne à la classe supérieure et $l-\varepsilon$ à la classe inférieure, sera dite la *limite supérieure* de la suite (1) *pour m infini*, ou simplement la *limite supérieure* (2).

Dans le cas précédemment exclu, où une partie des termes de la suite (1) augmenterait indéfiniment par valeurs positives, ou bien encore lorsque tous iraient en augmentant indéfiniment par valeurs négatives, l'une de nos deux catégories disparaîtrait et la définition

---

(1) Les mots *plus petits que, plus grands que* n'excluent pas ici l'égalité.

(2) On pourrait être tenté de prendre les mots *limite supérieure* dans le sens qui leur est attribué en d'autres occasions (notamment lorsqu'on traite des fonctions d'une variable réelle) et qui est un peu différent de celui-ci. En effet, il faudrait alors ne ranger un nombre dans la classe supérieure que lorsqu'il est plus grand que *tous* les termes de la suite (1), et non pas seulement que les termes d'indice suffisamment élevé.

Nous serons donc obligé, lorsqu'on aurait à craindre une confusion, d'employer la locution *limite supérieure pour m infini*, qui ne peut prêter à aucune ambiguïté.

précédente tomberait en défaut. La limite supérieure devrait être regardée comme égale à $+\infty$ dans le premier cas, à $-\infty$ dans le second.

2. ε désignant toujours un nombre positif aussi petit qu'on veut, il existe des quantités u_m, d'indice aussi élevé qu'on le voudra, comprises entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$, puisque, d'après la définition même de l, la suite donnée contient des termes indéfiniment éloignés supérieurs à $l-\varepsilon$, au lieu qu'à partir d'un certain rang elle n'en renferme plus de supérieur à $l+\varepsilon$. Donc *on peut, dans la suite* (1), *trouver une suite partielle qui ait pour limite l.* Bien entendu, il s'agit ici d'une limite, absolument parlant, et non plus seulement d'une limite supérieure telle que nous venons de la définir [1].

Il peut même se trouver, comme cas particulier, que u_m s'approche indéfiniment de l pour *toutes* les valeurs de m suffisamment grandes. Il en est ainsi, d'après la remarque précédente, lorsque, si petit que soit ε, l'inégalité $u_m > l-\varepsilon$ est vérifiée, à partir d'un certain rang, pour toutes les valeurs de m et non pas seulement pour une infinité d'entre elles. l devient alors pour la suite (1) une véritable limite, au sens ordinaire du mot. Dans ce cas, il nous arrivera de dire que les termes de la suite (1) *tendent régulièrement vers l.* Cette locution, dont à la rigueur on pourrait se passer, aura l'avantage de bien marquer, sans allonger le discours, la différence qui existe entre ce cas particulier et le cas général.

Si la suite donnée est à termes positifs, elle ne peut avoir 0 comme limite supérieure sans tendre régulièrement vers cette limite. Car u_m est supérieur à $-\varepsilon$, quel que soit m.

Nous remarquerons encore que la limite supérieure d'une suite n'est

---

[1] La notion de limite supérieure que nous introduisons ici est en relation avec la théorie des ensembles.

On sait que M. Cantor définit un *ensemble dérivé* dont fait partie toute quantité q telle que l'ensemble primitif contienne une infinité de termes aussi voisins qu'on le veut de q.

Dans cette terminologie, notre limite supérieure serait le plus grand élément de l'ensemble dérivé.

pas altérée lorsqu'on augmente ou diminue les termes de quantités infiniment petites pour m infini.

3. Au lieu de considérer des quantités u_m dépendant d'un seul indice, on peut introduire des quantités $u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$, où figurent p indices indépendants $m_1, m_2, \ldots, m_p$ variables de o à $+\infty$, et définir d'une façon tout analogue la limite supérieure de $u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ pour $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = \infty$. On formera, à cet effet, les deux classes supérieure et inférieure d'après la règle suivante : un nombre A sera rangé dans la première s'il est supérieur à toutes les quantités u dont les indices $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dépassent tous un entier N convenablement choisi; un nombre B sera placé dans la seconde lorsqu'on pourra trouver des u plus grands que B et dont les indices soient tous supérieurs à tel entier qu'on voudra ([1]).

4. La notion de limite supérieure va nous permettre de déterminer tout d'abord le rayon de convergence d'une série de Taylor, et de résoudre ainsi d'une façon générale le problème traité par M. Lecornu ([2]) dans le cas où le rapport de deux coefficients consécutifs a une limite.

Soit

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x. Nous envisagerons la suite à termes positifs

$$(3) \qquad |a_1|, \quad |\sqrt{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots$$

([1]) On sait (*voir* Cantor, *Journal de Borchardt*, t. 84, p. 242) que l'on peut ramener le cas d'un ensemble à p indices au cas d'un ensemble à indice unique. Il est à remarquer que cette assimilation ne s'applique pas dans la question actuelle. La méthode de M. Cantor oblige effectivement à donner un rang élevé à tout terme dans lequel un au moins des indices est très grand, au lieu que nous ne devons considérer comme infiniment éloignés que les termes dans lesquels *tous* les p indices auront de très grandes valeurs.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 février 1887.

Si cette dernière suite contient des termes augmentant indéfiniment, la série donnée n'est jamais convergente, quelle que soit la variable x. Car il existera toujours des valeurs de m en nombre infini pour chacune desquelles, $|\sqrt[m]{a_m}|$ étant plus grand que $\frac{1}{|x|}$, le terme correspondant $a_m x^m$ aura un module supérieur à 1.

5. Ce cas doit donc être laissé de côté, et nous devons supposer que *la suite* (3) *admet une limite supérieure* l.

Donnons à x un module plus petit que $\frac{1}{l}$, soit $\frac{1}{l+\varepsilon}$. Par hypothèse, $l+\frac{\varepsilon}{2}$ appartient à la classe supérieure par rapport à la suite (3). Donc, à partir d'un certain rang, chaque quantité $|a_m|$ est plus petite que $\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^m$ et le module de $\sqrt[m]{a_m x^m}$ est (et reste) inférieur à $\frac{l+\frac{\varepsilon}{2}}{l+\varepsilon}$, nombre fixe plus petit que 1, ce qui montre que la série $\sum a_m x^m$ est convergente.

Au contraire, si nous donnions à x un module $\frac{1}{l-\varepsilon}$ plus grand que $\frac{1}{l}$, comme nous savons que, pour une infinité de valeurs de m, $|a_m|$ est supérieur à $(l-\varepsilon)^m$, la série $\Sigma a_m x^m$ aurait une infinité de termes plus grands que 1 : ce serait une série divergente.

Donc *le rayon de convergence de notre série est* $\rho = \frac{1}{l}$.

Si, en particulier, le rapport $\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}$ tend vers une limite, $|\sqrt[m]{a_m}|$ aura la même limite, qui sera bien par conséquent, ainsi que l'avait énoncé M. Lecornu, l'inverse du rayon de convergence.

Au lieu de $|\sqrt[m]{a_m}|$, nous aurions pu considérer (¹) l'expression $\frac{1}{m}\mathrm{L}|a_m|$, qui est le logarithme de la précédente. La limite supérieure de cette nouvelle quantité, pour m infini, aurait donné le logarithme de l.

(¹) $\mathrm{L}|a_m|$ désigne, comme d'habitude, le logarithme népérien de $|a_m|$.

6. Un cas important est celui où la quantité l est nulle, et où, par suite, $|\sqrt[m]{a_m}|$ tend vers o, ainsi que nous l'avons remarqué au nº **2**. En ce cas, pour toute valeur attribuée à x, notre série est convergente; car (en désignant par k un nombre quelconque plus petit que 1) à partir du moment où l'on aura $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{k}{|x|}$, le terme général sera inférieur à k^m, c'est-à-dire au terme général d'une série absolument convergente.

La fonction $f(x)$ est donc une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan.

7. Ainsi, lorsque notre limite supérieure est infinie, le développement donné ne définit aucune fonction. Lorsqu'elle est nulle, il définit une fonction entière et permet de la calculer pour toute valeur de la variable.

Au contraire, si la limite supérieure l est finie et différente de o, le développement (2) définit une fonction $f(x)$, mais n'en fournit d'expression que pour les valeurs de x intérieures au cercle de convergence. Le problème qui se pose actuellement est donc l'étude de cette fonction en dehors du cercle ou sur le cercle, et tout d'abord la détermination des points critiques situés sur la circonférence.

Dans les fonctions les plus simples, telles que $\frac{1}{(\alpha - x)^p}$, par exemple, l'affixe du point singulier s'obtient en prenant la limite du rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$. On peut donc se demander s'il est possible d'énoncer ce résultat sous forme de théorème général.

Pour discuter cette proposition, il est nécessaire d'en préciser la signification. Prise dans son acception la plus étendue, elle voudrait dire que pour toute série où le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ a une limite, le point correspondant est le seul point singulier situé sur le cercle de convergence. Ainsi comprise, la proposition est manifestement fausse : elle ne s'applique pas, par exemple, à la fonction

$$\frac{1}{1-x} + \mathrm{L}(1+x) = \sum \left[1 + \frac{(-1)^{m+1}}{m}\right] x^m.$$

La réciproque est également inexacte : x_0 peut être point singu-

lier unique d'une fonction représentée par la série (2), sans que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tende vers x_0, ainsi que nous en rencontrerons un exemple dans la suite.

Au contraire, lorsque le rapport des coefficients consécutifs tend vers une limite, le point qui a cette limite pour affixe paraît être, en général, *un* point singulier. En tous cas, nous pouvons établir une conclusion très voisine de celle-là.

8. Les résultats précédents nous fournissent en effet un premier criterium permettant de reconnaître les points critiques.

Soit $x = x_0$ un point pris sur le cercle de convergence, et proposons-nous de rechercher si ce point est ordinaire ou singulier.

Nous pouvons d'abord supposer $x_0 = 1$, car nous pourrions ramener le cas général à celui-là par le changement de variable

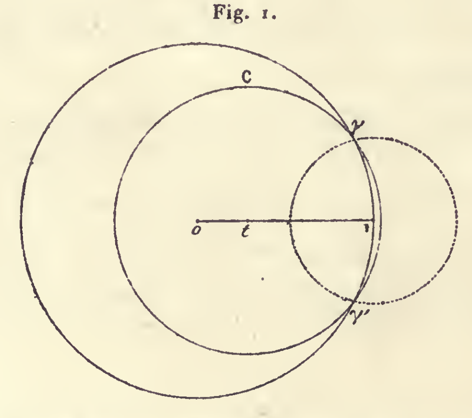
$$x = x_0 y, \tag{4}$$

dans lequel, à la valeur x_0 donnée à x, correspondrait pour y la valeur $y = 1$.

Soit alors t un nombre réel compris entre 0 et 1, auquel correspond un point de l'axe réel (*fig.* 1). Le rayon de convergence de la série

$$f(x+t) = f(t) + xf'(t) + \frac{x^2}{2}f''(t) + \ldots + \frac{x^m}{m!}f^{(m)}(t) + \ldots \tag{5}$$

Fig. 1.



sera le rayon du plus grand cercle C décrit du point t comme centre et où la fonction donnée f sera régulière.

Si le point $x = 1$ est point ordinaire, notre fonction sera holomorphe dans un cercle c ayant pour centre ce point $x = 1$, et qui coupera le cercle primitif en deux points γ et γ', par conséquent aussi dans un cercle de centre t et d'un rayon égal à la distance des deux points t et γ, laquelle est supérieure à $1 - t$.

Si, au contraire, le point $x = 1$ est un point critique, le cercle C devra passer par ce point et avoir pour rayon $1 - t$.

Reportons-nous maintenant aux résultats obtenus relativement au rayon de convergence : nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour que le point $x = 1$ soit singulier sera fournie par l'inégalité [1]

$$(6) \qquad \left|\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right| > \left(\frac{1-\varepsilon}{1-t}\right)^m,$$

laquelle devra être vérifiée, si petit que l'on ait pris ε, pour une infinité de valeurs de m.

9. Mettons en évidence le module et l'argument de chaque coefficient a, autrement dit posons

$$a_m = g_m e^{i\alpha_m}.$$

L'inégalité (6) (élevée au carré) pourra s'écrire

$$(6') \left\{\begin{aligned} & g_m^2 + 2(m+1)\,t\,g_m g_{m+1}\cos(\alpha_{m+1} - \alpha_m) + \ldots \\ & + t^h \sum_{k=0}^{h} \left[C_{m+k}^{k}\, C_{m+h-k}^{h-k}\, g_{m+k}\, g_{m+h-k} \cos(\alpha_{m+h-k} - \alpha_{m+k})\right] + \ldots \\ & > \left[1 + 2mt + \frac{2m(2m+1)}{2} t^2 + \ldots + C_{2m+h-1}^{h}\, t^h + \ldots\right](1-\varepsilon)^{2m}; \end{aligned}\right.$$

les lettres C désignant, comme à l'ordinaire, des coefficients binomiaux.

---

(1) Il n'y a pas lieu d'écrire l'inégalité

$$\left|\frac{f^{(m)} t}{m!}\right| < \left(\frac{1+\varepsilon}{1-t}\right)^m,$$

car le rayon de convergence de la série (5) ne saurait être inférieur à $1 - t$.

Cette forme donnée à l'inégalité (6) permet de trouver des cas particuliers assez étendus où elle est vérifiée.

Remarquons d'abord que la somme $\sum_{k=0}^{h} C_{m+k}^{k} C_{m+h-k}^{h-k}$ est égale à C_{2m+h+1}^{h}. Ceci se reconnaît immédiatement en supposant que la fonction f soit la fonction $\frac{1}{1-x}$. Le premier membre de l'égalité (6) devient alors égal à $\frac{1}{(1-t)^{m+1}}$ et, dans l'inégalité (6′), il faut faire $g_m = 1$, $\alpha_m = 0$. On trouve alors

$$(7)\qquad \frac{1}{(1-t)^{2(m+1)}} = 1 + \ldots + t^h \sum_{k=0}^{h} C_{m+k}^{k} C_{m+h-k}^{h-k} + \ldots,$$

ce qui donne la conclusion annoncée.

Supposons maintenant que g_m tende régulièrement ([1]) vers la limite 1 ; que, de plus, pour toutes les valeurs de p et de q suffisamment grandes, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ soit inférieure en valeur absolue à un angle fixe ψ plus petit que $\frac{\pi}{2}$ (l'égalité étant exclue). A partir d'une certaine valeur de m, on aura (η désignant un nombre aussi petit qu'on veut)

$$g_m > (1-\eta)^m, \qquad \cos(\alpha_{m+k} - \alpha_{m+k'}) > \cos\psi;$$

d'où l'on déduit, en ayant égard à la formule (7), que le premier membre de l'inégalité (6′) est supérieur à $\cos\psi \frac{(1-\eta)^{2m}}{[1-t(1-\eta)]^{2(m+1)}}$. Sa racine $m^{\text{ième}}$ sera donc (à un infiniment petit près) au moins égale à $\frac{1-\eta}{1-t(1-\eta)}$, c'est-à-dire (si l'on a pris η suffisamment petit) supérieur à $\frac{1-\varepsilon}{1-t}$, car $\frac{1-\eta}{1-t(1-\eta)}$ a pour limite $\frac{1}{1-t}$ lorsque η tend vers 0. L'inégalité (6′) est donc vérifiée et le point $x = 1$ est un point singulier.

10. Ce résultat subsisterait alors même que l'inégalité $|\alpha_q - \alpha_p| < \psi$

([1]) *Voir* n° 2.

cesserait d'être vraie pour les valeurs de p et de q ne satisfaisant pas à la condition

$$\frac{q-p}{p} < s$$

dans laquelle q est supposé, pour fixer les idées, plus grand que p, et s désigne un nombre positif fixe.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que, pour toutes les valeurs de h inférieures à ms, les évaluations précédentes sont encore applicables : le coefficient de t^h est plus grand que $C^h_{2m+h+1}(1-\eta)^{2m+h}\cos\psi$.

Soit n le plus petit entier supérieur à ms. A partir de la valeur $h=n$, nous ne savons plus si le coefficient de t^h est supérieur à l'expression précédente; nous ne savons même plus s'il est positif; mais en tout cas sa valeur absolue sera moindre que $C^h_{2m+h+1}(1+\eta')^{2m+h}$ (où η' désigne encore un nombre très petit), de sorte que le premier membre de l'inégalité (6′) sera supérieur à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}&\cos\psi\frac{(1-\eta)^{2m}}{[1-t(1-\eta)]^{2(m+1)}}\\ &-\sum_{h=n}^{\infty}C^h_{2m+h+1}t^h[(1+\eta')^{2m+h}+\cos\psi(1-\eta)^{2m+h}].\end{aligned}\right.$$

Dans le dernier facteur du coefficient de t^h, le second terme $\cos\psi(1-\eta)^{2m+h}$ peut évidemment rentrer dans le premier $(1+\eta')^{2m+h}$, moyennant un accroissement infiniment petit donné à η'. Dans la série qui forme la partie soustractive de l'expression (8), après cette simplification, le rapport d'un terme au précédent, égal à $t(1+\eta')\frac{2m+h+1}{h}$, est moindre que $t(1+\eta')\frac{2+s}{s}$. Cette quantité est plus petite que 1, si l'on a choisi t inférieur à $\frac{s}{(2+s)(1+\eta')}$, et la série est égale au produit d'un facteur fini $\left[\text{de module moindre que } \frac{1}{1-t(1+\eta')\frac{2+s}{s}}\right]$ par son premier terme $C^n_{2m+n+1}(1+\eta')^{2m+n}t^n$.

Or, si l'on applique au coefficient C^n_{2m+n+1} les formules bien connues relatives à la fonction Γ pour de grandes valeurs de l'argu-

ment, on reconnaît que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce premier terme tend vers $\frac{(2+s)^{2+s}}{2^2 s^s}(1+\eta')^{2+s}t^s$, c'est-à-dire, puisque nous pouvons prendre t aussi petit que nous le désirons, vers une limite moindre que $\frac{1-\varepsilon}{1-t}$. La partie soustractive de l'expression (8) est donc infiniment petite par rapport au premier terme et ne modifie pas, par suite, les conclusions établies plus haut.

Si le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ a pour limite l'unité, la racine $m^{\text{ième}}$ de g_m tend régulièrement vers 1 et la différence $\delta_m = \alpha_{m+1} - \alpha_m$ tend vers 0. Nous reconnaissons que le point $x=1$ est bien un point singulier si le produit $m\delta_m$ reste toujours inférieur à un nombre fixe Q. En effet, s'il en est ainsi, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ sera moindre que ψ tant que le rapport $\frac{q-p}{p}$ ne dépassera pas $\frac{\psi}{Q}$.

11. Mais on peut encore s'affranchir d'une partie des restrictions précédentes, car il n'est pas nécessaire que l'inégalité (6) soit vraie pour toutes les valeurs très grandes de m, mais seulement pour une infinité d'entre elles. Il suffira donc que la série contienne, en nombre infini, des suites interrompues de coefficients

$$(9)\qquad \begin{cases} a_m, & a_{m+1}, & \ldots, & a_{m+n}; \\ a_{m'}, & a_{m'+1}, & \ldots, & a_{m'+n'}; \\ a_{m''}, & a_{m''+1}, & \ldots, & a_{m''+n''}; \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{cases}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les rapports $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m'}, \frac{n''}{m''}$ sont tous supérieurs à un nombre fixe s;

2° $|\sqrt[m]{g_m}|$ tend régulièrement vers 1 quand m augmente indéfiniment par des valeurs correspondant à des termes de ces suites;

3° Si a_p et a_q sont deux coefficients pris dans une même suite, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ est en valeur absolue moindre que ψ.

A chacune de ces suites, à partir d'un certain rang, correspondra une valeur de m pour laquelle l'inégalité (6') sera vérifiée.

Si la troisième condition $(\alpha_q - \alpha_p) < \psi$ était remplacée par la double inégalité

$$(10) \qquad (q-p)\theta - \psi < \alpha_q - \alpha_p < (q-p)\theta + \psi,$$

la fonction donnée admettrait le point singulier $x = e^{-i\theta}$. Ce résultat est équivalent au premier moyennant une transformation (4), effectuée avec la valeur $e^{-i\theta}$ pour x_0.

Sous cette forme, notre proposition se distingue de celles que nous avons données précédemment en ce qu'elle peut, dans certains cas, déceler la présence de plusieurs points singuliers. L'existence de suites (9) correspondant à une certaine valeur de θ n'est, en effet, nullement incompatible avec l'existence de suites analogues, mais pour lesquelles l'angle θ, qui figure dans les conditions (10), aurait des valeurs différentes.

On pourrait même, par ce procédé, former des séries qui admettraient le cercle de convergence comme ligne singulière.

Supposons, par exemple, les nombres rationnels rangés en suite linéaire, comme l'indique M. Cantor, et soit r_λ celui qui occupe le rang λ. Nous considérons une série dans laquelle, pour toutes les valeurs de m comprises entre $(1+s)^\lambda$ et $(1+s)^{\lambda+1}$, le rapport $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ sera égal à $e^{2i\pi r_\lambda}$. Nous aurons une infinité de suites pour lesquelles ce rapport aura la même valeur, car les quantités $e^{2i\pi(r_\lambda+1)}$, $e^{2i\pi(r_\lambda+2)}$, ... sont toutes égales à $e^{2i\pi r_\lambda}$. Le point $x = e^{-2i\pi r_\lambda}$ est donc singulier, quel que soit λ, et par conséquent le cercle de rayon 1 est bien ici une coupure.

12. Signalons encore un autre cas simple où l'on reconnaît que le cercle de convergence est ligne singulière. Soit, par exemple, la série [1],

$$(11) \qquad 1 + bx^c + \ldots + b^\nu x^{c^\nu} + \ldots,$$

qui a été considérée par M. Weierstrass [2] et qui converge dans un

---

[1] c est un entier positif et b un nombre quelconque.

[2] *Voir* du Bois-Reymond, *Journal de Borchardt*, t. LXXIX, p. 30.

cercle de rayon $\rho = \lim b^{-\frac{\nu}{c^\nu}} = 1$. Cette série n'est altérée que dans ses premiers termes par le changement de x en $xe^{\frac{2ki\pi}{c^h}}$, où k et h sont deux entiers arbitraires. Or la fonction correspondante admet nécessairement sur le cercle de rayon 1 au moins un point singulier $x = x_0$. Elle aura donc aussi une singularité en chacun des points

$$x = x_0 e^{\frac{2ki\pi}{c^h}},$$

parmi lesquels on en pourra trouver qui approchent autant qu'on le voudra d'un point quelconque pris sur le cercle.

Les mêmes raisonnements s'appliqueront toutes les fois que les indices des termes non nuls et de plus en plus éloignés auront un commun diviseur de plus en plus grand. En ce cas, le cercle de convergence sera par conséquent une coupure, ainsi que l'avait démontré M. Lerch ([1]) dans un cas particulier. M. Weierstrass ([2]) avait d'ailleurs constaté ce fait sur la série (11).

13. La démonstration précédente offre cet inconvénient qu'elle fait dépendre le résultat d'une question de divisibilité, en sorte qu'il semblerait ne pas subsister nécessairement si, par exemple, on augmentait ou diminuait d'une unité les exposants de quelques puissances de x dans la série (11).

Il n'en est rien, cependant, et l'on peut affirmer que *la série*

$$\sum b_\mu x^{c_\mu}$$

(où les c_μ sont des entiers croissants) *admet son cercle de convergence comme ligne singulière, si le rapport* $\frac{c_{\mu+1} - c_\mu}{c_\mu}$ *est constamment supérieur à un nombre fixe s.*

Pour s'en convaincre, il suffit de donner à m, dans la formule (6'),

---

([1]) *Acta mathematica*, t. X, p. 87.

([2]) *Monatsberichte der königl. Acad. der Wissenschaften zu Berlin*, août 1880.

la valeur $\frac{c_\mu}{u}$, où u est un nombre fixe compris entre 1 et $1+s$, et que nous déterminerons ultérieurement [1]. Au premier membre, le premier terme non nul est

$$\left(C_{c_\mu}^m g_{c_\mu} t^{c_\mu - m}\right)^2,$$

et, d'après les formules déjà employées au n° **10**, sa racine $2m^{\text{ième}}$ est, pour une infinité de valeurs de μ, supérieure à $\frac{(1-\eta)t^{u-1}u^u}{(u-1)^{u-1}}$.

Cette expression a son maximum pour $u = \frac{1}{1-t}$ et devient égale à $\frac{1-\eta}{1-t}$. Quant aux termes suivants, ainsi qu'on l'a vu plus haut, ils n'influent pas sur le résultat, si l'on a choisi pour t une valeur satisfaisant aux inégalités

$$t(1+\eta')\frac{2+s}{s} < 1, \qquad \frac{(2+s)^{2+s}}{2^2 s^s}(1+\eta')^{2+s} t^s < \frac{1-\varepsilon}{1-t}.$$

La proposition est donc démontrée, car les raisonnements que nous venons de faire ne seraient pas altérés si l'on effectuait la transformation (4) avec la valeur $x_0 = e^{i\theta}$, de sorte que notre fonction admet pour point singulier le point $x_0 = e^{i\theta}$, quel que soit θ.

Bien entendu, le résultat précédent peut subsister, lors même que le rapport $\frac{c_{\mu+1} - c_\mu}{c_\mu}$ ne serait pas constamment supérieur à s. Il suffit qu'il prenne deux valeurs consécutives supérieures à s, et cela une infinité de fois, les modules des coefficients correspondants tendant régulièrement vers 1.

Nous bornerons ici ces remarques préliminaires et, dans les Chapitres qui vont suivre, nous traiterons la question à un point de vue tout différent.

Les points critiques susceptibles d'être reconnus à l'aide des propositions précédentes sont en effet (ainsi qu'il deviendra évident par la

(1) Si $\frac{c_\mu}{u}$ n'est pas entier, il faudra prendre pour m l'entier le plus voisin de $\frac{c_\mu}{u}$.

suite) d'espèces très diverses; au lieu que nous allons maintenant étudier les singularités en les distinguant d'après leur nature et en commençant par les plus simples, à savoir les singularités polaires.

DEUXIÈME PARTIE.

14. *Si la seule singularité située sur le cercle de convergence est un pôle, simple ou multiple, l'affixe de ce point est donné par la limite du rapport* $\frac{a_m}{a_{m+1}}$, comme on le voit en employant les expressions indiquées par M. Darboux ([1]) pour les coefficients.

Par exemple, si la série (2), convergente dans le cercle de rayon ρ, admet pour unique singularité sur ce cercle le pôle simple $x = x_1$, le coefficient a_m peut se mettre sous la forme $\frac{A}{x_1^m} - \frac{\theta_m}{(\rho' - \varepsilon)^m}$, où θ_m désigne une quantité de module inférieur à 1, ε un infiniment petit, et ρ' un rayon supérieur à ρ. On voit alors immédiatement que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tend vers x_1, et cela de telle façon que la différence soit, à partir d'un certain rang, inférieure à $\left(\frac{\rho}{\rho' - \varepsilon}\right)^m$ ou à k^m, k désignant un nombre fixe plus petit que 1.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante.

En effet, pour écrire que le point $x = x_1$ est pôle simple et d'ailleurs singularité unique sur le cercle de convergence, il suffit d'exprimer que, en multipliant la série (2) par $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)$, on obtient une série convergente dans un cercle de rayon plus étendu que le premier. Or, en faisant cette multiplication, on trouve pour terme général

$$x^m\left(a_m - \frac{a_{m-1}}{x_1}\right) = x^m a_{m-1}\left(\frac{a_m}{a_{m-1}} - \frac{1}{x_1}\right)$$

Le coefficient de x^m devient donc plus petit que $\left[\frac{k}{\rho}(1+\varepsilon)\right]^m$, si la différence $\frac{a_m}{a_{m-1}} - \frac{1}{x_1}$ est moindre que k^m.

([1]) *Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres*, p. 15.

15. Cherchons maintenant dans quels cas notre fonction a pour singularités, sur le cercle de convergence, plusieurs pôles simples ou multiples.

Nous serons tout pareillement conduits à multiplier la fonction donnée $f(x)$ par un polynôme

$$(12) \quad \mathfrak{P}_p(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{\mu_1}\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)^{\mu_2}\cdots = 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(p)}x^p,$$

de degré p, et à nous demander si le produit obtenu est une fonction régulière dans un cercle de rayon supérieur à ρ.

16. Après la multiplication, les nouveaux coefficients seront donnés par la formule

$$(13) \qquad b_m = a_{m+p} + A^{(1)}a_{m+p-1} + \ldots + A^{(p)}a_m,$$

et devront satisfaire à l'inégalité

$$|b_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m.$$

Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$,

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \cdots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_{m+p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p} & \cdots & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

que la formule (13) permet d'écrire

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & \cdots & a_{m+p-1} & b_m \\ a_{m+1} & \cdots & \cdots & b_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p} & \cdots & a_{m+2p-1} & b_{m+p} \end{vmatrix}.$$

Sous cette dernière forme, les hypothèses faites sur les a et les b

nous font voir immédiatement que $D_{m,p}$ doit être plus petit que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho^p\rho'}\right)^m$, où ε a toujours la même signification que précédemment, à savoir, un nombre que l'on peut supposer aussi petit qu'on le veut, pourvu que l'on prenne m suffisamment grand.

La limite supérieure, pour m infini, *de* $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ *est donc moindre que* $\frac{1}{\rho^{p+1}}$.

17. Réciproquement, supposons que, pour certaines valeurs de P, la limite supérieure (pour m infini) de $\sqrt[m]{|D_{m,P}|}$ soit moindre que $\frac{1}{\rho^{P+1}}$.

Soit p la plus petite de ces valeurs, et $\frac{1}{\rho^p\rho'}$ la limite supérieure correspondante. Par hypothèse, la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ est $\frac{1}{\rho^p}$.

Je dis, en premier lieu, que $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ *tend régulièrement vers cette limite.* En d'autres termes ([1]), si petit que soit ε, à partir d'un certain rang, chaque déterminant $D_{m,p-1}$ a un module supérieur à $\left(\frac{1-\varepsilon}{\rho^p}\right)^m$.

Nous savons, en effet, qu'il existe une infinité de déterminants $D_{m,p-1}$ plus grands que les valeurs correspondantes de $\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon}{\rho^p}\right)^m$ ou de α^m $\left(\text{en posant } \alpha=\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon}{\rho^p}, \text{ d'où } \frac{1-\varepsilon}{\rho^p}=\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}\right)$.

Si, à partir d'un certain rang, tous satisfont à cette condition, notre conclusion est établie. Dans le cas contraire, on devra pouvoir trouver, et cela aussi loin qu'on le voudra dans la série, un déterminant $D_{m_0,p-1}$ supérieur à α^{m_0}, précédé d'un déterminant $D_{m_0-1,p-1}$ moindre que α^{m_0-1}.

Or on a, quel que soit m,

$$D_{m+1,p-1}D_{m-1,p-1}-D^2_{m,p-1}=D_{m-1,p}D_{m,p-2}. \tag{14}$$

Car les mineurs du déterminant $D_{m-1,p}$ relatifs aux éléments a_{m-1}, a_{m+p-1}, a_{m+2p-1}, qui occupent les angles de ce déterminant, sont res-

---

([1]) *Voir* au n° **2**.

pectivement

$$D_{m+1,p-1},\quad D_{m,p-1},\quad D_{m-1,p-1},$$

et le mineur du second ordre obtenu par la suppression des deux lignes et des deux colonnes extrêmes est $D_{m,p-2}$. L'égalité (14) n'est donc que l'expression d'une identité bien connue relative aux déterminants.

Cette égalité (14) fournit d'ailleurs, d'après ce que nous savons sur l'ordre de grandeur des déterminants $D_{m,p}$ et $D_{m,p-2}$, l'inégalité

$$(14')\qquad |D_{m+1,p-1}D_{m-1,p-1}-D^2_{m,p-1}|<\left(k\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}\right)^{2m},$$

où k est un nombre plus petit que 1 ([1]).

Donnons à m la valeur m_0 : nous trouvons

$$|D_{m_0+1,p-1}|>\alpha^{m_0+1}(1-k^{2m_0}),\qquad \left|\frac{D_{m_0+1,p-1}}{D_{m_0,p-1}}\right|>\alpha(1-k^{2m_0}),$$

d'où résulte déjà que, pour m_0 très grand, les quantités $|D_{m_0+1,p-1}|$ et $\left|\frac{D_{m_0+1,p-1}}{D_{m_0,p-1}}\right|$ seront respectivement supérieures à $\left(\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}\right)^{m_0+1}$ et $\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}$.

En général, nous allons démontrer que, si l'on a pris le nombre m_0 suffisamment grand, on aura, pour toute valeur positive de l'entier i,

$$(15)\qquad \left|\frac{D_{m_0+i,p-1}}{D_{m_0+i-1,p-1}}\right|>\alpha(1-k^{2m_0})[1-k^{2(m_0+1)}]\ldots[1-k^{2(m_0+i-1)}],$$

$$(16)\qquad |D_{m_0+i,p-1}|>\alpha^{m_0+i}(1-k^{2m_0})^i[1-k^{2(m_0+1)}]^{i-1}\ldots[1-k^{2(m_0+i-1)}],$$

$$(17)\qquad \sqrt[m_0+i]{|D_{m_0+i,p-1}|}>\alpha\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Ces inégalités sont, en effet, vérifiées pour $i=1$. Supposons-les démontrées pour une certaine valeur de i. Je vais faire voir qu'elles sub-

---

([1]) $k=(1+\varepsilon')\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}$.

sisteront pour la valeur suivante, et que l'on pourra écrire

$$(15') \qquad \left|\frac{D_{m_0+i+1,\,p-1}}{D_{m_0+i,\,p-1}}\right| > \alpha(1-k^{2m_0})[1-k^{2(m_0+1)}]\ldots[1-k^{2(m_0+i)}],$$

$$(16') \quad |D_{m_0+i+1,\,p-1}| > \alpha^{m_0+i+1}(1-k^{2m_0})^{i+1}[1-k^{2(m_0+1)}]^{i}\ldots[1-k^{2(m_0+i-1)}]^2(1-k^{2(m_0+i)}],$$

$$(17') \qquad \sqrt[m_0+i+1]{|D_{m_0+i+1,\,p-1}|} > \alpha\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Pour cela, nous ferons $m = m_0 + i$ dans l'inégalité (14'), laquelle, en tenant compte de la formule (17), nous donnera

$$\left|\frac{D_{m_0+i+1,\,p-1}}{D_{m_0+i,\,p-1}}\right| > \left|\frac{D_{m_0+i,\,p-1}}{D_{m_0+i-1,\,p-1}}\right|[1-k^{2(m_0+i)}],$$

dont la multiplication membre à membre avec la formule (15) fournit la formule (15').

Celle-ci, combinée avec (16), donne l'inégalité (16').

Quant à l'inégalité (17'), elle résulte de la précédente, pourvu que l'on ait choisi pour m_0 une valeur suffisamment élevée; car il vient successivement

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\cdot\sqrt[m_0+i+1]{|D_{m_0+i+1,\,p-1}|}\\ &> (1-k^{2m_0})^{\frac{i+1}{m_0+i+1}}[1-k^{2(m_0+1)}]^{\frac{i}{m_0+i+1}}\ldots[1-k^{2(m_0+i)}]^{\frac{1}{m_0+i+1}}\\ &> (1-k^{2m_0})[1-k^{2(m_0+1)}]\ldots[1-k^{2(m_0+i)}]\\ &\qquad > 1-[k^{2m_0}+k^{2(m_0+1)}+\ldots+k^{2(m_0+i)}] > 1-\frac{k^{2m_0}}{1-k^2}.\end{aligned}$$

Il nous suffira donc que l'indice m_0 satisfasse à la condition

$$\frac{k^{2m_0}}{1-k^2} < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon},$$

ce qui est évidemment possible.

L'inégalité (17) est, dès lors, générale, et notre proposition préliminaire est démontrée.

18. Cela posé, déterminons les quantités $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$, ..., $A_m^{(p)}$ par

les équations

$$(18)\quad \begin{cases} a_{m+p} + A_m^{(1)} a_{m+p-1} + A_m^{(2)} a_{m+p-2} + \ldots + A_m^{(h)} a_{m+p-h} + \ldots + A_m^{(p)} a_m = 0, \\ a_{m+p+1} + A_m^{(1)} a_{m+p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m^{(h)} a_{m+p+1-h} + \ldots + A_m^{(p)} a_{m+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m+2p-1} + A_m^{(1)} a_{m+2p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m^{(h)} a_{m+2p-1-h} + \ldots + A_m^{(p)} a_{m+p-1} = 0, \end{cases}$$

et posons

$$\delta_m^{(h)} = A_{m+1}^{(h)} - A_m^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Les δ pourront être considérés comme donnés par les équations

$$(19)\quad \begin{cases} \delta_m^{(1)} a_{m+p} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+p+1-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+1} = 0, \\ \delta_m^{(1)} a_{m+p+1} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+p+2-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta_m^{(1)} a_{m+2p-2} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+2p-1-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+p-1} = 0, \\ \delta_m^{(1)} a_{m+2p-1} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+2p-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+p} + H = 0, \end{cases}$$

en introduisant la quantité auxiliaire

$$(20)\qquad H = a_{m+2p} + A_m^{(1)} a_{m+2p-1} + \ldots + A_m^{(p)} a_{m+p}.$$

L'élimination des A entre les équations (18) et (20) donne

$$(21)\qquad H = \frac{D_{m,p}}{D_{m,p-1}},$$

moyennant quoi les équations (19) fournissent

$$(22)\qquad \delta_m^{(h)} = -\frac{D_{m+1,p-2}^{(h)}}{D_{m+1,p-1}} H = -\frac{D_{m,p}\, D_{m+1,p-2}^{(h)}}{D_{m,p-1}\, D_{m+1,p-1}},$$

où $D_{m+1,p-2}^{(h)}$ désigne un déterminant d'ordre $p-1$ formé avec les coefficients a et moindre que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho^{p-1}}\right)^m$.

Comme on a les inégalités

$$\sqrt[m]{|\mathrm{D}_{m,p}|} < \frac{1+\varepsilon}{\rho^p \rho'},$$

$$\sqrt[m]{|\mathrm{D}_{m,p-1}|} > \frac{1-\varepsilon}{\rho^p},$$

$$\sqrt[m]{|\mathrm{D}_{m+1,p-1}|} > \frac{1-\varepsilon}{\rho^p},$$

cette formule (22) montre que la limite supérieure de $\sqrt[m]{|\delta_m^{(h)}|}$ est au plus égale à $\frac{\rho}{\rho'}$.

La série $\sum_m \delta_m^{(h)}$, ayant son terme général de l'ordre de $\left(\frac{\rho}{\rho'}+\varepsilon\right)^m$, est donc convergente et son reste est aussi du même ordre.

$\mathrm{A}_m^{(h)}$ tend, par conséquent, lorsque m augmente indéfiniment, vers une limite $\mathrm{A}^{(h)}$, et cela de telle façon que la différence $\mathrm{A}^{(h)} - \mathrm{A}_m^{(h)}$ reste moindre en valeur absolue que $\left(\frac{\rho}{\rho'}+\varepsilon\right)^m$.

Il suffit alors d'écrire la première des équations (18) sous la forme

$$a_{m+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_m = \sum_{h=1}^{p} (\mathrm{A}^{(h)} - \mathrm{A}_m^{(h)}) a_{m+p-h}$$

pour reconnaître que la quantité

$$(13) \qquad b_m = a_{m+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_m$$

est moindre que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m$.

L'existence d'un polynôme $\mathfrak{P}$ (12) répondant à la question est donc établie, et nous avons même le moyen de trouver ce polynôme. On devra, d'après ce qui précède, résoudre les équations (18) par rapport aux A et chercher la limite des valeurs de $\mathrm{A}_m^{(h)}$ ainsi obtenues, lorsqu'on donne à m des valeurs de plus en plus grandes. L'erreur commise en s'arrêtant à un certain rang m sera comparable au $m^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique décroissante de raison $\frac{\rho}{\rho'}$.

Ainsi *les singularités de notre fonction sur le cercle de rayon* ρ *se réduisent à des pôles, en nombre égal à* p (*chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité*), et dont les affixes sont racines d'une équation que nous savons former ([1]).

Ces pôles exceptés, la fonction est régulière dans le cercle de rayon ρ'.

19. Pour rechercher si les singularités de $f(x)$ situées sur le cercle de rayon ρ' sont aussi des pôles, il suffirait d'appliquer la méthode précédente au produit $f(x)\mathfrak{P}_p(x)$.

Mais on peut aussi opérer directement sur la fonction $f(x)$, ainsi que nous allons le montrer.

Désignons, en général, par l_P la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,P}|}$ et remarquons d'abord que le rapport $\frac{l_{P-1}}{l_P}$ est égal à ρ tant que P est moindre que p et à ρ' lorsque $P = p$.

Pour $P \geqq p$, l_P est au plus égal à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{P-p+1}}$. Car le déterminant $D_{m,P}$ peut s'écrire

$$(23)\quad D_{m,P} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \cdots & a_{m+p-1} & b_m & b_{m+1} & \cdots & b_{m+P-p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_{m+p} & b_{m+1} & b_{m+2} & \cdots & b_{m+P-p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+P} & a_{m+P+1} & \cdots & a_{m+P+p-1} & b_{m+P} & \cdots & \cdots & b_{m+2P-p} \end{vmatrix}.$$

Plus généralement, la formule (13), résolue par rapport à a_{m+p} et appliquée plusieurs fois de suite, permet d'exprimer a_{m+p}, a_{m+p+1}, ..., a_{m+P} en fonction linéaire de a_m, a_{m+1}, ..., a_{m+p-1} et des b.

Ces expressions, reportées dans la valeur de $D^{(h)}_{m,P}$, lui donnent une forme analogue à la forme (23) et sur laquelle on reconnaît que la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D^{(h)}_{m,P}|}$ est au plus égale à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{P-p+1}}$.

([1]) Le cas du pôle simple, précédemment étudié, correspond à $p = 1$. Les déterminants $D_{m,p-1}$ ne sont autres que les coefficients a_m eux-mêmes.

Les raisonnements précédents subsistent, pourvu qu'on ait soin de remplacer les déterminants $D_{m,p-2}$ et $D^{(h)}_{m,p-2}$ par l'unité.

Nous noterons ce fait q : la relation

$$\underset{m=\infty}{\text{limite sup.}} \sqrt[m]{|D_{m,P}^{(h)}|} \leqq \frac{1}{\rho^p \rho'^{P-p+1}}$$

peut être considérée comme exacte à partir de la valeur $P = p - 1$.

Supposons maintenant que l_P devienne moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{P-p+1}}$, et soit q la plus petite valeur de P pour laquelle cet abaissement se produise (q pouvant être égal à $p+1$ ou plus grand).

On peut aussi dé nir q comme la plus petite valeur de P pour laquelle le rapport $\frac{l_P}{l_{P-}}$ devienne inférieur à $\frac{1}{\rho'}$. En particulier, on a

$$\frac{l_q}{l_{q-1}} < \frac{l_{q-1}}{l_{q-2}},$$

ou

$$l_q l_{q-2} < l_{q-1}^2. \tag{24}$$

Si nous nous reportons alors à l'identité (14), dans laquelle nous changerons p en q, nous voyons que la limite supérieure de

$$\left|\sqrt[m]{D_{m+1,q-1} D_{m-1,q-1} - D_{m,q-1}^2}\right|$$

est plus petite que l_{q-1}^2.

Dès lors tous les raisonnements donnés au n° **17** peuvent se recommencer en remplaçant p par q et $\frac{1}{\rho^p}$ par l_{q-1}, α étant supposé égal à $l_{q-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et k à $(1+\varepsilon')\sqrt{\frac{l_q l_{q-2}}{l_{q-1}^2}}$.

La conclusion à laquelle on aboutit est que $\sqrt[m]{|D_{m,q-1}|}$ tend régulièrement vers la limite l_{q-1}.

20. Tout pareillement, nous écrirons un système de q équations

$$(18') \quad \begin{cases} a_{m+q} + A_m^{(1)} a_{m+q-1} + \ldots + A_m'^{(h)} a_{m+q-h} + A_m'^{(q)} a_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m+2q-1} + A_m'^{(1)} a_{m+2q-2} + \ldots + \ldots\ldots\ldots + A_m'^{(q)} a_{m+q-1} = 0, \end{cases}$$

analogue au système (18); et si nous posons

$$\delta'^{(h)}_m = A'^{(h)}_{m+1} - A'^{(h)}_m \qquad (h = 1, 2, \ldots, q),$$

il viendra

$$(22') \qquad \delta'^{(h)}_m = -\frac{D_{m,q}\, D^{(h)}_{m,q-2}}{D_{m,q-1}\, D_{m+1,q-1}}.$$

Mais $q-2$ étant au moins égal à $p-1$, la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D^{(h)}_{m,q-2}|}$ est au plus égale à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p-1}}$, c'est-à-dire à l_{q-2}. La racine $m^{\text{ième}}$ de $\delta'^{(h)}_m$ sera douc moindre que $\frac{l_q l_{q-2}}{l^2_{q-1}} + \varepsilon$, de sorte que $A'^{(h)}_m$ tend, pour chaque valeur de h, vers une limite $A'^{(h)}$.

Pour trouver l'ordre de grandeur de la quantité

$$a_{m+q} + A'^{(1)} a_{m+q-1} + \ldots + A'^{(q)} a_m,$$

il est nécessaire de faire subir aux équations (18′) une transformation.

Nous avons vu, au numéro précédent, que les quantités a_{m+p}, $a_{m+p+1}, \ldots, a_{m+P}$ sont liées à $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+p-1}, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_{m+P-p}$, par un système S_P de $P-p+1$ relations linéaires à coefficients indépendants de m, système qui peut être résolu par rapport à $a_{m+p}, \ldots, a_{m+P}$ comme par rapport à $b_m, \ldots, b_{m+P-p}$. On peut donc, au lieu des équations (18′), écrire les suivantes

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & b_{m+q-p} + B^{(1)}_m b_{m+q-p-1} + \ldots \\ & \qquad + B^{(q-p)}_m b_m + \alpha^{(1)}_m a_{m+p-1} + \ldots + \alpha^{(p)}_m a_m = 0, \\ & b_{m+q-p+1} + B^{(1)}_m b_{m+q-p} + \ldots \\ & \qquad + B^{(q-p)}_m b_{m+1} + \alpha^{(1)}_m a_{m+p} + \ldots + \alpha^{(p)}_m a_{m+1} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & b_{m+2q-p-1} + B^{(1)}_m b_{m+2q-p-2} + \ldots \\ & \qquad + B^{(q-p)}_m b_{m+q-1} + \alpha^{(1)}_m a_{m+p+q-2} + \ldots + \alpha^{(p)}_m a_{m+q-1} = 0, \end{aligned} \right.$$

qui équivalent aux équations (18′) moyennant les relations S_q. On passe des coefficients B et α aux A′, et inversement, par une substitution linéaire Σ_q à coefficients indépendants de m.

Si nous formons les différences

$$B_{m+1}^{(h)} - B_m^{(h)}, \quad \alpha_{m+1}^{(k)} - \alpha_m^{(k)}, \quad (h = 1, 2, \ldots q - p; \, k = 1, 2, \ldots, p),$$

nous voyons que les premières sont inférieures à $\left(\frac{l_q l_{q-2}}{l_{q-1}^2} + \varepsilon\right)^m$. Quant aux secondes, elles se présentent sous la forme du produit de

$$\frac{D_{m,q}}{D_{m,q-1} D_{m+1,q-1}}$$

par un déterminant $\mathcal{D}_{m,q-2}^{(k)}$ se déduisant du déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{m+q-p-1} & \ldots & b_m & a_{m+p-1} & \ldots & a_m \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m+2q-p-2} & \ldots & b_{m+q-1} & a_{m+q+p-2} & \ldots & a_{m+q-1} \end{vmatrix}$$

par la suppression de la dernière ligne et de l'une des p *dernières* colonnes, et qui, par conséquent, est moindre que $\left(\frac{1}{\rho^{p-1}\rho'^{q-p}} + \varepsilon\right)^m$ ou que $\left(l_{q-2}\frac{\rho}{\rho'} + \varepsilon\right)^m$.

Les limites des quantités α sont d'ailleurs nulles, ainsi qu'on le reconnaît en résolvant, par rapport aux α, les p premières équations (25), où les B, qui sont des quantités finies, sont regardés comme connus; et si $B^{(h)}$ désigne la limite de $B_m^{(h)}$ pour m augmentant indéfiniment, le système de nombres $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(q-p)}, 0, 0, \ldots, 0$ est celui même que l'on déduit du système $A'^{(1)}, \ldots, A'^{(q)}$ par la substitution Σ_q, de sorte que la somme $a_{m+q} + A^{(1)} a_{m+q-1} + \ldots + A^{(q)} a_m$ est, moyennant les relations S_q et Σ_q, identiquement égale à

$$b_{m+q} + B^{(1)} b_{m+q-1} + \ldots + B^{(q-p)} b_m.$$

Or cette dernière, d'après les évaluations obtenues pour $B^{(h)} - B_m^{(h)}$ et $\alpha^{(k)} - \alpha_m^{(k)}$, est inférieure à $\left(\frac{l_q}{l_{q-1}} + \varepsilon\right)^m$.

Nous avons donc formé un polynôme

$$\Phi_q'(x) = 1 + A'^{(1)} x + \ldots + A'^{(q)} x^q$$

tel que le produit $\mathfrak{P}'_{(q)}(x)f(x)$ soit holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que ρ' $\left(\rho'' = \frac{l_{q-1}}{l_q}\right)$.

Comme cela était évident *a priori*, ce polynôme $\mathfrak{P}'_q$ contient en facteur le polynôme $\mathfrak{P}_p$; il est identique au produit

$$\mathfrak{P}_p(1 + B^{(1)}x + \ldots + B^{(q-p)}x^{q-p}).$$

Il n'existe d'ailleurs pas de pareil polynôme $\mathfrak{P}'$ pour un degré $q - i$ moindre que q; sans quoi, si l'on désignait par c_m les coefficients du produit $f\mathfrak{P}'_{q-i}$, le déterminant $D_{m,q-i}$ pourrait s'écrire

$$D_{m,q-i} = \begin{vmatrix} a_m & \ldots & a_{m+p-1} & b_m & b_{m+q-i-p-1} & c_m \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m+q-i} & \ldots & a_{m+q+p-i-1} & b_{m+q-i} & b_{m+2(q-i)-p-1} & c_{m+q-i} \end{vmatrix},$$

et sa racine $m^{\text{ième}}$ aurait une limite supérieure moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-i-p+1}}$, ce qui, d'après nos hypothèses, ne peut arriver que pour $i = 0$.

La fonction $f(x)$ admet donc p pôles sur la circonférence de rayon ρ et $q - p$ sur la circonférence de rayon ρ' (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité). Ces pôles exceptés, elle est régulière dans un cercle de rayon $\rho'' = \frac{l_{q-1}}{l_q}$.

21. Rien n'empêche de recommencer à nouveau ces raisonnements. Premièrement, on démontrera que, pour $P \geqq q$, les limites supérieures de $D_{m,P}$ et de $D^{(h)}_{m,P}$ sont au plus égales à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p} \rho''^{P-q+1}}$ En désignant par r la plus petite valeur de P telle que l_P soit moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p} \rho''^{P-q+1}}$, on remarquera d'abord que l'inégalité

$$(26) \qquad \lim_{m=\infty} \text{sup.} \sqrt[m]{|D^{(h)}_{m,P}|} \leqq l_P$$

est vérifiée pour les valeurs de P comprises entre q et r, comme elle l'était déjà pour les valeurs moindres que q, et l'on partira ensuite de

la relation

$$l_r l_{r-2} < l_{r-1}^2$$

pour effectuer des opérations analogues aux précédentes (¹) et calculer un polynôme $\mathfrak{P}''_r$ tel que le produit $f\mathfrak{P}''_r$ soit holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que ρ''. On démontrera, comme tout à l'heure, qu'il ne peut exister aucun polynôme $\mathfrak{P}''$ de degré moindre que r.

Notre fonction est donc méromorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho''' = \frac{l_{r-1}}{l_r}$. Elle admet dans ce cercle r pôles, à savoir p de module ρ, $q-p$ de module ρ', $r-q$ de module ρ''.

On pourra continuer ainsi tant que l'on trouvera des valeurs de P satisfaisant à l'inégalité

$$(27) \qquad \frac{l_{\mathrm{P}}}{l_{\mathrm{P}-1}} < \frac{l_{\mathrm{P}-1}}{l_{\mathrm{P}-2}},$$

et, par conséquent, on peut énoncer les conclusions suivantes :

Le rapport $\frac{l_{\mathrm{P}-1}}{l_{\mathrm{P}}}$ *ne va jamais en diminuant.*

Si pour $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{(\lambda)}$, *ce rapport prend une valeur*

$$\rho^{(\lambda)} = \frac{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}-1}}{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}}},$$

supérieure à $\frac{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}-2}}{l_{\mathrm{P}^{(\lambda)}-1}}$, *la fonction* $f(x)$ *est méromorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon* $\rho^{(\lambda)}$; *elle y admet en tout* $\mathrm{P}^{(\lambda)}$ *pôles (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).*

(¹) Nous avons utilisé, pour la transformation des déterminants $\mathrm{D}_{m,\mathrm{P}}^{(h)}$ et des équations (18′), les relations linéaires qui permettent d'exprimer les coefficients $a_{m+p}, \ldots, a_{m+q}$ en fonction de $a_m, \ldots, a_{m+p-1}$ et des b.

Les relations analogues qu'il convient d'employer ici sont celles qui donnent $a_{m+\mathrm{P}}$ en fonction linéaire de $a_m, \ldots, a_{m+p-1}, b_m, \ldots, b_{m+q-p-1}, c_m, \ldots, c_{m+\mathrm{P}-q-1}$ (c_m désignant un coefficient du produit $f\mathfrak{P}'$), et de même les substitutions des opérations suivantes introduiraient 4, 5, ... séries de coefficients.

Au reste, il faut remarquer que ces relations ne servent qu'à la démonstration. Elles n'interviennent pas dans le calcul des polynômes $\mathfrak{P}$.

Si l'on a

$$P^{(\lambda+1)} = 1 + P^{(\lambda)},$$

$f(x)$ n'admet qu'un seul pôle $x = \xi$ sur le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$ et le polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda+1)}$ est égal au produit $\mathfrak{P}^{(\lambda)}\left(1 - \frac{x}{\xi}\right)$. Or, dans le polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$, le coefficient de la plus haute puissance de x est $\lim \frac{D_{m,P^{(\lambda)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda)}}}$, et dans le polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda+1)}$, il est $\lim \frac{D_{m,P^{(\lambda+1)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda+1)}}}$. L'affixe du pôle unique est donc donnée par la formule

$$(28) \qquad \xi = \lim_{m=\infty} \frac{D_{m,P^{(\lambda)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda)}}} : \frac{D_{m,P^{(\lambda+1)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda+1)}}},$$

et les erreurs commises en s'arrêtant aux valeurs successives de m diminuent comme les termes d'une progression géométrique décroissante ayant pour raison $\frac{\rho^{(\lambda)}}{\rho^{(\lambda+1)}}$.

22. Si nous envisageons la suite des quantités $l_1, l_2, \ldots, l_P, \ldots$, nous sommes conduits à distinguer les cas suivants :

1° A partir d'un certain moment, l_P devient nul. La fonction n'a dans tout le plan qu'un nombre limité de pôles. Elle est égale au quotient d'une fonction holomorphe par un polynôme entier.

2° Le rapport $\frac{l_P}{l_{P-1}}$ tend vers 0 lorsque P augmente indéfiniment. Notre fonction n'a que des pôles dans un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut. Elle est donc méromorphe dans tout le plan.

Nous avons d'ailleurs tous les éléments nécessaires pour former la fonction holomorphe $G(x)$ qui admet pour zéros les pôles de $f(x)$, avec le même ordre de multiplicité.

En premier lieu, les modules des pôles successifs sont les valeurs de $\frac{l_{P-1}}{l_P}$. Le genre de la fonction $G(x)$, s'il existe, sera un nombre γ tel que la série $\sum\left(\frac{l_P}{l_{P-1}}\right)^\gamma$ soit convergente.

Si ce nombre est égal à 1, la fonction $G(x)$ sera la limite du produit

convergent

$$\prod_n \left(1 - \frac{x}{x_n}\right),$$

x_n étant l'affixe du $n^{\text{ième}}$ pôle, et par conséquent la limite, pour λ infini, du polynôme

$$\mathfrak{P}^{(\lambda)}(x) = \prod_{n=1}^{p^{(\lambda)}} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

Si le nombre γ est supérieur à 1, on sait qu'il faudrait multiplier chacun des facteurs $\left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$ par $e^{-\int^x \left(\frac{1}{x_n} + \frac{x}{x_n^2} + \dots + \frac{x^{\gamma-2}}{x_n^{\gamma-1}}\right) dx}$

Or la somme $\sum_{n=1}^{p^{(\lambda)}} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{x}{x_n^2} + \dots + \frac{x^{\gamma-2}}{x_n^{\gamma-1}}\right)$ constitue les $\gamma - 1$ premiers termes du développement de $\sum_{n=1}^{p^{(\lambda)}} \left(\frac{1}{x - x_n}\right) = \frac{d}{dx} \log \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)$.

La fonction G (x) sera donc la limite, pour λ infini, de l'expression

$$\mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)\, e^{-\int Q_\lambda(x)\, dx},$$

où $Q_\lambda(x)$ désigne l'ensemble des $\gamma - 1$ premiers termes dans le développement de $\frac{d}{dx} \log \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)$ suivant les puissances croissantes de x.

Si enfin il n'existait pas de genre fini, il faudrait calculer les affixes des différents pôles et appliquer telle quelle la méthode de M. Weierstrass.

Dans ces différents cas, on peut d'ailleurs obtenir le développement taylorien de G (x).

La fonction G (x) est en effet la limite de fonctions holomorphes

$$G^{(\lambda)} x = a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} x + \dots + a_m^{(\lambda)} x^m + \dots,$$

où les coefficients $a^{(\lambda)}$ peuvent être considérés comme donnés par la formule

$$a_m^{(\lambda)} = \frac{1}{2 i \pi} \int_C \frac{G^{(\lambda)}(z)}{z^m}\, dz,$$

C désignant un contour fermé décrit autour de l'origine et que nous pourrons supposer, pour fixer les idées, intérieur au cercle de convergence primitif.

Sur ce contour, $G^{(\lambda)}(z)$ tend uniformément vers sa limite $G(z)$ quand λ augmente indéfiniment et par conséquent, dans les mêmes conditions, $a_m^{(\lambda)}$ a pour limite a_m.

La fonction $G(x)$ étant ainsi calculée, le produit $f(x)G(x)$ sera une fonction $F(x)$ holomorphe dans tout le plan, et dont la multiplication des séries f et G nous fournira d'ailleurs le développement; de sorte que nous aurons l'expression de la série donnée sous forme du quotient de deux fonctions entières

$$f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

3° Le rapport $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ reste invariable à partir d'une certaine valeur $P^{(\lambda)}$. $f(x)$ est alors le quotient par un polynôme $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ d'une fonction régulière dans un cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$, mais présentant sur ce cercle des singularités autres que des pôles. C'est à l'étude de cette dernière fonction (dont on peut avoir le développement de Taylor) qu'est ramenée l'étude de la proposée.

4° Enfin, il peut arriver que le rapport $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ tende vers une limite $\frac{1}{R}$ différente de o, de sorte que les rayons $\rho^{(\lambda)}$ tendent vers R. La fonction f, méromorphe dans chacun des cercles $\rho^{(\lambda)}$, admet une infinité de pôles dans le voisinage du cercle de rayon R.

Nous pourrons chercher à former une fonction $G(x)$ qui admette pour zéros les pôles de $f(x)$, en appliquant la méthode de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler.

Nous prendrons d'abord une suite de nombres positifs $\alpha^{(\lambda)}$ qui tendent (¹) vers o; puis une suite de quantités positives $\varepsilon^{(\lambda)}$ telles que la série $\Sigma\varepsilon^{(\lambda)}$ soit convergente. Si $V^{(\lambda)}(x)$ désigne alors le polynôme qui a

(¹) Les pôles étant ici distribués en nombre infini dans le cercle de rayon R et non point dans tout le plan, nous sommes obligés de modifier légèrement la méthode de M. Weierstrass, qui laisse les quantités α finies.

pour racines les affixes des pôles situés sur le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$, autrement dit le quotient

$$V^{(\lambda)}(x) = \frac{\mathfrak{P}^{(\lambda+1)}(x)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)},$$

$\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x)$ sera développable en série uniformément convergente dans le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$, et l'on pourra en retrancher un polynôme $Q^{(\lambda)}(x)$ tel que la différence $\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x) - Q^{(\lambda)}(x)$ soit, à l'intérieur de ce cercle, moindre que $\varepsilon^{(\lambda)}$.

D'ailleurs $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$ tend vers R, puisque $\alpha^{(\lambda)}$ tend vers o; et, par suite, un point quelconque x pris à l'intérieur du cercle de rayon R sera, à partir d'une certaine valeur de λ, intérieur à tous les cercles de rayons $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$. Il en résulte que la série

$$\sum \left[\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x) - Q^{(\lambda)}(x)\right]$$

sera convergente à l'intérieur du cercle de rayon R et que nous pourrons prendre pour notre fonction $G(x)$ le produit

$$\prod_{\lambda=0}^{\infty} V^{(\lambda)}(x)\, e^{-\int Q^{(\lambda)}x\,dx}. \tag{29}$$

G est donc une limite de fonctions holomorphes $G^{(\lambda)}(x)$, obtenues en prenant de plus en plus de facteurs dans le produit infini (29). On démontrera d'ailleurs, ainsi qu'il a été expliqué pour le cas où $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ tend vers o, que chaque coefficient de $G(x)$ est la limite, pour λ infini, du coefficient de même rang dans $G^{(\lambda)}(x)$, et l'on pourra ainsi développer G en série.

La multiplication des fonctions f et G fournira une fonction F holomorphe également dans le cercle de rayon R. L'étude de la fonction donnée est donc ramenée à celle de deux fonctions F et G, holomorphes dans le cercle R, mais présentant sur ce cercle des singularités non polaires, et dont on peut obtenir les développements. f sera donnée par le quotient de ces deux fonctions.

23. Si

$$(30) \qquad \psi(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots$$

désigne une fonction régulière à l'intérieur d'un certain cercle et ne s'annulant pas à l'origine, de sorte que C_0 est différent de o, les résultats précédents nous fournissent une méthode pour calculer les zéros de $\psi(x)$ à l'intérieur de ce cercle; car les zéros de $\psi(x)$ sont les pôles de la fonction

$$(2') \qquad f(x) = \frac{1}{\psi(x)} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

C'est à cette manière de procéder que revient, au fond, la formule de Bernoulli, qui donne la racine de plus petit module comme limite du rapport de deux coefficients consécutifs dans le développement de la dérivée logarithmique. Il suffit, en effet, pour obtenir cette formule, d'appliquer à la dérivée logarithmique la proposition du n° **14**.

M. Runge [1] a généralisé la formule de Bernoulli en obtenant sous une forme analogue la $\nu^{\text{ième}}$ racine d'un polynôme (en supposant les racines rangées par ordre de module croissant). Les méthodes données dans les Chapitres précédents conduisent à des résultats équivalents, mais applicables à une fonction quelconque dans tout cercle où elle est régulière. En supposant calculés les coefficients $a_0, \ldots, a_m, \ldots$ de $\frac{1}{\psi(x)}$, la racine de rang $P^{(\lambda)}$, si elle est seule de son module, sera donnée par la formule (28). Si plusieurs racines ont le même module, on les obtiendra ensemble comme racines d'une équation algébrique formée en égalant à o le quotient de deux polynômes $\mathfrak{P}$ consécutifs.

Le calcul des coefficients a_m et des déterminants $D_{m.p}$ à l'aide des coefficients C de la fonction donnée peut d'ailleurs se faire de la façon suivante.

En développant, suivant les puissances croissantes de x, le produit

---

(1) *Acta mathematica*, t. VI, p. 316.

$f(x)F(x)$, qui est égal à 1, nous aurons, pour déterminer les coefficients a, les équations

$$(31)\qquad \begin{cases} 1 = a_0 C_0, \\ 0 = a_0 C_1 + a_1 C_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 = a_0 C_m + a_1 C_{m-1} + \dots + a_m C_0. \end{cases}$$

De ces équations nous tirerons

$$(32)\qquad a_m = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ C_{m-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_0 \\ C_m & \dots & \dots & \dots & \dots & C_1 \end{vmatrix}}{(-1)^m C_0^{m+1}}$$

24. Pour calculer les déterminants $D_{m,p}$, nous utiliserons les formules (20) et (21).

Dans ces formules, on suppose que la fonction $f(x)$ a été multipliée par un polynôme

$$1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p$$

tel que le produit

$$(1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p) f(x) = \frac{1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p}{\psi(x)}$$

manque des termes en x^{m+p}, x^{m+p-1}, ..., x^{m+2p-1}, et la quantité

$$(21)\qquad H = \frac{D_{m,p}}{D_{m,p-1}}$$

est égale au coefficient de x^{m+2p}.

Nous égalerons donc le produit $f(x)\sum a'_m x^m$, non plus à 1, mais à $1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p$, en faisant

$$a'_{m+p} = a'_{m+p+1} = \dots = a'_{m+2p-1} = 0, \qquad a'_{m+2p} = H,$$

et nous aurons les équations

$$(33)\quad \begin{cases} 1 = C_0 a_0, \\ 0 = C_{p+1} a'_0 + C_p a'_1 + \ldots + C_0 a'_{p+1}, \\ 0 = C_{p+2} a'_0 + C_{p+1} a'_1 + \ldots + C_1 a'_{p+1} + C_0 a'_{p+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = C_{m+p-1} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_0 a'_{m+p-1}, \\ 0 = C_{m+p} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_1 a'_{m+p-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = C_{m+2p-1} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_p a'_{m+p-1}, \\ 0 = C_{m+2p} a'_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{p+1} a'_{m+p-1} + HC_0. \end{cases}$$

Nous n'avons pas écrit les équations obtenues par la comparaison des coefficients de x, x^2, ..., x^p, car elles ne serviraient qu'à donner la valeur des paramètres auxiliaires $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$, ..., $A_m^{(p)}$. Les $m+p+1$ équations restantes donnent

$$(34)\qquad H = \frac{(-1)^{m+p} E_{m,p}}{C_0^2 E_{m,p-1}}$$

en posant

$$(35)\quad E_{m,p} = \begin{vmatrix} C_{p+1} & C_p & \ldots & C_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_{p+2} & C_{p+1} & \ldots & C_1 & C_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_0 \\ C_{m+p} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m+2p} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_{p+1} \end{vmatrix}$$

Ainsi la quantité $\dfrac{C_0^{2p} D_{m,p}}{(-1)^{mp+\frac{p(p+1)}{2}} E_{m,p}}$ ne change pas quand on augmente ou diminue p d'une unité, m restant le même. Or, pour $p = 0$,

elle est égale à $\frac{(-1)^m}{C_0^{m+1}}$, d'après la formule (32). On a donc

$$(36) \qquad D_{m,p} = (-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{C_0^{m+2p+1}}.$$

Telle est l'expression de $D_{m,p}$, qu'il suffira de reporter dans la formule (28) pour calculer la racine ξ.

25. Au lieu de considérer la limite supérieure de $\sqrt[m]{|a_m|}$, pour déterminer le rayon de convergence, il revient au même, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (n° **5**), de chercher la limite supérieure de $\frac{L|a_m|}{m}$.

La recherche des discontinuités polaires situées sur le cercle de convergence peut, dès lors, être regardée comme un cas particulier du problème suivant, que nous allons traiter et dont la solution nous sera utile plus tard :

Étant données la série

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et une fonction positive

$$M = \varphi(m),$$

qui augmente constamment et indéfiniment avec m, *mais de telle façon que* $\frac{L\varphi(m+1)}{L\varphi(m)}$ *tende vers* 1, *soit* ω *la limite supérieure pour* m *infini, de* $\frac{L|a_m|}{LM}$.

Exprimer qu'en multipliant la série (2) *par un polynôme de degré* p *convenablement choisi*

$$(12) \qquad \mathfrak{P}_p = 1 + A^{(1)}x + A^{(2)}x^2 + \ldots + A^{(p)}x^p,$$

on peut diminuer la valeur de cette limite supérieure, c'est-à-dire

qu'en opérant sur la nouvelle série

$$f(x)\varphi(x) = \sum b_m x^{m+p}$$

comme sur la première et formant la limite supérieure de $\frac{\mathrm{L}|b_m|}{\mathrm{LM}}$, *on trouvera une quantité* ω' *plus petite que* ω.

Afin de simplifier l'écriture, nous conviendrons de représenter indistinctement par la lettre θ divers nombres de module inférieur à 1, et par la lettre ε différents nombres infiniment petits pour m infini. Nous pourrons écrire, avec cette nouvelle notation,

$$(37) \qquad b_m = a_{m+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_m = \theta \mathrm{M}^{\omega'+\varepsilon}.$$

Dans cette égalité, remplaçons m successivement par $m_0, m_1, \ldots, m_p$, où $m_0, m_1, \ldots, m_p$ sont $p+1$ entiers tous très grands. Nous aurons

$$\begin{cases} a_{m_0+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m_0+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_{m_0} = \theta \mathrm{M}_0^{\omega'+\varepsilon}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m_p+p} + \mathrm{A}^{(1)} a_{m_p+p-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} a_{m_p} = \theta \mathrm{M}_p^{\omega'+\varepsilon}. \end{cases}$$

Nous considérerons maintenant le déterminant d'ordre $p+1$

$$(38) \qquad \Delta^{(p)}_{m_0, m_1, \ldots, m_p} = \begin{vmatrix} a_{m_0} & \ldots & a_{m_p} \\ a_{m_0+1} & \ldots & a_{m_p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m_0+p} & \ldots & a_{m_p+p} \end{vmatrix}$$

Chaque colonne de ce déterminant correspond, comme on le voit, a l'un des indices $m_0, m_1, \ldots, m_p$. Le mineur relatif à l'élément a_{m_i+k}, pris dans la colonne correspondant à l'indice m_i, étant désigné par la notation $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$, la formule (37) montre que notre déterminant peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(0,p)} b_{m_0} + \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(1,p)} b_{m_1} + \ldots + \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(p,p)} b_{m_p}.$$

Il y aura donc au moins une valeur de i pour laquelle on aura

$$|\Delta^{(p)}| \leqq p \left| \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, p)} \right|,$$

et, par conséquent,

$$\left| \frac{\Delta^{(p)}}{\left[\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, p)}\right]} \right| = \theta M_i^{\omega'+\varepsilon},$$

d'où la conclusion suivante :

Si, pour chaque déterminant $\Delta^{(p)}_{m_0, \dots, m_p}$, *on prend la plus petite des quantités* $\frac{1}{LM_i} L \left| \frac{\Delta^{(p)}}{\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}} \right|$, *la limite supérieure, pour* $m_0, \dots, m_p$ *infinis* (n° 3) *du résultat ainsi obtenu* [1] *devra être plus petite que* ω, *au plus égale à* ω'.

26. Réciproquement, supposons que cette condition soit vérifiée pour une certaine valeur de p, et que l'on arrive, en suivant la marche indiquée ci-dessus, à une limite supérieure moindre que ω. Nous pouvons admettre que cette valeur de p est la plus petite pour laquelle il en soit ainsi, et que par conséquent il existe des déterminants $\Delta^{(p-1)}_{m_0, \dots, m_{p-1}}$ à indices tous aussi élevés qu'on le veut, tels que chacun des quotients $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\left[\frac{\partial \Delta^{(p-1)}}{\partial(i, k)}\right]}$ soit supérieur à $M_i^{\omega-\varepsilon}$. Pour abréger, nous donnerons à ces déterminants le nom de *déterminants principaux*. Ainsi, l'on a, pour un déterminant principal,

$$\frac{\Delta^{(p-1)}}{\left(\frac{\partial \Delta^{(p-1)}}{\partial(i, k)}\right)} = \frac{1}{\theta} M_i^{\omega-\varepsilon} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \dots, p-1).$$

---

[1] Nous considérons tous les quotients $\frac{\Delta}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial i, k}\right)}$, au lieu de nous en tenir, comme notre raisonnement nous l'indiquait, à ceux pour lesquels le nombre k est égal à p. Il est clair que la conclusion donnée dans le texte subsiste *a fortiori* dans ces nouvelles conditions.

Au lieu du déterminant $\Delta^{(p-1)}$, nous introduirons un déterminant $\mathfrak{D}$, défini de la façon suivante :

Au-dessous du déterminant $\Delta^{(p-1)}$, écrivons la ligne $a_{m_0+p}, \ldots, a_{m_{p-1}+p}$. Nous formons ainsi un tableau rectangulaire

$$(39) \quad \begin{cases} a_{m_0}, & \ldots, & a_{m_{p-1}}; \\ a_{m_0+1}, & \ldots, & a_{m_{p-1}+1}; \\ \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots; \\ a_{m_0+p-1}, & \ldots, & a_{m_{p-1}+p-1}; \\ a_{m_0+p}, & \ldots, & a_{m_{p-1}+p}. \end{cases}$$

$\mathfrak{D}$ sera le plus grand déterminant déduit de ce tableau rectangulaire par la suppression d'une des lignes, soit la ligne de rang h.

Le nombre h ne pouvant avoir que $p+1$ valeurs, il est clair qu'on pourra toujours trouver des déterminants principaux à indices augmentant tous indéfiniment, et pour lesquels h ait la même valeur. Provisoirement, nous ne nous occuperons que de déterminants principaux choisis de cette façon, c'est-à-dire pour lesquels h aura une valeur déterminée, la même pour tous.

Le mineur de $\mathfrak{D}$ relatif à l'élément a_{m_i+k}, pris dans la colonne correspondant à l'indice m_i, sera encore désigné par la notation $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i,k)}$.

Le déterminant $\mathfrak{D}$ *jouira de la même propriété que le déterminant* $\Delta^{(p-1)}$, et l'on aura aussi

$$(40) \quad \frac{\mathfrak{D}}{\left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i,k)}\right]} = \frac{1}{\theta} M_i^{\omega-\varepsilon} (i=0, \ldots, p-1;\ k=0,1,2,\ldots,h-1, h+1,\ldots,p)$$

Considérons, en effet, l'un des mineurs $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i,k)}$, que nous pouvons supposer différent de o, sans quoi le quotient correspondant serait infini, ce qui est une manière de vérifier l'inégalité (40). Nous pouvons déterminer des paramètres λ_j (j prenant toutes les valeurs de o à

p, les valeurs h et k exceptées) par les $p-1$ équations

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \lambda_j a_{m_0+j} = a_{m_0+k},\\
&\sum \lambda_j a_{m_1+j} = a_{m_1+k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\sum \lambda_j a_{m_{i-1}+j} = a_{m_{i-1}+k},\\
&\sum \lambda_j a_{m_{i+1}+j} = a_{m_{i+1}+k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum \lambda_j a_{m_{p-1}+j} = a_{m_{p-1}+k},
\end{aligned}\right.$$

et, si Q désigne le quotient $\dfrac{\mathfrak{D}}{\left[\dfrac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i,k)}\right]}$, on aura

$$(42)\qquad \sum \lambda_j a_{m_i+j} = \mathrm{Q};$$

mais d'autre part, $\mathfrak{D}$ étant différent de o, on peut déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_p$ par les p équations

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_{m_0+h} = \alpha_0 a_{m_0} + \alpha_1 a_{m_0+1} \ldots + \alpha_{h-1} a_{m_0+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_0+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{m_0+p},\\
&a_{m_1+h} = \alpha_0 a_{m_1} + \alpha_1 a_{m_1+1} \ldots + \alpha_{h-1} a_{m_1+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_1+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{m_1+p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{m_i+h} = \alpha_0 a_{m_i} + \alpha_1 a_{m_i+1} \ldots + \alpha_{h-1} a_{m_i+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_i+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{m_i+p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{m_{p-1}+h} = \alpha_0 a_{m_{p-1}} + \alpha_1 a_{m_{p-1}+1} \ldots + \alpha_{h-1} a_{m_{p-1}+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_{p-1}+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{m_{p-1}+p};
\end{aligned}\right.$$

et même, à cause des hypothèses faites sur le déterminant $\mathfrak{D}$, tous les coefficients α seront plus petits que 1 en valeur absolue. Le coefficient α_p est d'ailleurs différent de o, sans quoi le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ serait nul ; en sorte que nous pouvons résoudre les équations (43) par rapport à $a_{m_0+p}, a_{m_1+p}, \ldots, a_{m_{p-1}+p}$ respectivement. Ces valeurs, transportées

dans les équations (41) et (42), donnent les relations

$$(44)\quad \begin{cases} \mu_0 a_{m_0} + \mu_1 a_{m_0+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_0+p-1} = 0, \\ \mu_0 a_{m_1} + \mu_1 a_{m_1+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_1+p-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_0 a_{m_{i-1}} + \mu_1 a_{m_{i-1}+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_{i-1}+p-1} = 0, \\ \mu_0 a_{m_i} + \mu_1 a_{m_i+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_i+p-1} = \mathrm{Q}, \\ \mu_0 a_{m_{i+1}} + \mu_1 a_{m_{i+1}+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_{i+1}+p-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_0 a_{m_{p-1}} + \mu_1 a_{m_{p-1}+1} + \ldots + \mu_{p-1} a_{m_{p-1}+p-1} = 0. \end{cases}$$

Les coefficients μ_h et μ_k, ayant respectivement pour valeurs

$$\mu_h = \frac{\lambda_p}{\alpha_p}; \qquad \mu_k = -1 - \frac{\lambda_p}{\alpha_p}\alpha_k,$$

sont liés par la relation

$$(45)\qquad \mu_k + \alpha_k \mu_h = -1;$$

d'où résulte que l'un au moins de ces coefficients μ_h et μ_k est supérieur à $\frac{1}{2}$, puisque α_k est plus petit que 1. Or les deux quotients $\dfrac{\Delta^{(p-1)}}{\left[\dfrac{\partial\Delta^{(p-1)}}{\partial(i,h)}\right]}$ et $\dfrac{\Delta^{(p-1)}}{\left[\dfrac{\partial\Delta^{(p-1)}}{\partial(t,k)}\right]}$, égaux respectivement, d'après les équations (44), à $\dfrac{\mathrm{Q}}{\mu_h}$ et $\dfrac{\mathrm{Q}}{\mu_k}$, sont supérieurs à $\mathrm{M}_i^{\omega-\varepsilon}$. Il en est donc de même pour Q, ainsi que nous l'avions annoncé.

27. Cela posé, au tableau rectangulaire (39), adjoignons une dernière colonne composée des éléments

$$a_{m_p}, \quad a_{m_p+1}, \quad \ldots, \quad a_{m_p+p},$$

m_p désignant un indice très grand, mais plus petit que chacun des indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$. Nous obtenons un déterminant $\Delta^{(p)}_{m_0, m_1, \ldots, m_p}$. Par hypothèse,

ce déterminant contient un mineur $\frac{\partial \Delta^p}{\partial(i, k)}$ tel que le quotient $\frac{\Delta^{(p)}}{\left[\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}\right]}$ soit plus petit que $M_i^{\omega'+\varepsilon}$.

Si d'abord i est égal à p, on peut supposer, d'après la manière dont nous avons formé le déterminant $\mathfrak{D}$, que le mineur en question n'est autre que $\mathfrak{D}$.

Supposons maintenant que i soit différent de p. On peut d'abord prendre $k = h$; car, si k est différent de h, l'identité bien connue entre les mineurs d'un déterminant nous donne

$$\mathfrak{D} \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)} - \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(p, k)} \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)} = \Delta^{(p)} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i, k)},$$

égalité dans laquelle les remarques précédentes permettent de remplacer $\Delta^{(p)}$, $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(p, k)}$, $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i, k)}$ respectivement par $\theta \frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)} M_i^{\omega'+\varepsilon}$, $\theta \mathfrak{D}$, $\frac{\theta \mathfrak{D}}{M_i^{\omega-\varepsilon}}$, ce qui conduit à

$$\left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}\right| > \left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}\right| \left(1 - \frac{1}{M_i^{\omega-\omega'+\varepsilon}}\right) > \left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}\right| (1 - \varepsilon).$$

Nous pouvons donc substituer le mineur $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}$ au mineur $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}$.

Mais au mineur $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}$ on peut substituer le déterminant $\mathfrak{D}$. En effet, l'élément a_{m_p} peut se mettre sous la forme $\theta M_p^{\omega+\varepsilon}$, et l'on peut écrire sous cette même forme les coefficients $a_{m_p+1}, \ldots, a_{m_p+p}$, à cause des hypothèses faites sur la fonction $\varphi(m)$. Le déterminant $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}$ étant égal à

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i, 0)} a_{m_p} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i, 1)} a_{m_p+1} + \ldots + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i, h-1)} a_{m_p+h-1}$$
$$+ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i, h+1)} a_{m_p+h+1} + \ldots + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i, p)} a_{m_p+p},$$

il existe au moins un indice j tel que $\left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}\right|$ soit moindre que $\left|\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i,j)}\right| M_p^{\omega+\varepsilon}$. Or $\mathfrak{D}$ est supérieur à $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i,j)} M_i^{\omega-\varepsilon}$. On a donc

$$|\mathfrak{D}| > \left|\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, h)}\right| \frac{M_i^{\omega-\varepsilon}}{M_p^{\omega+\varepsilon}},$$

et cette inégalité, comparée à l'hypothèse

$$|\Delta^{(p)}| < \left|\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,h)}\right| M_i^{\omega'+\varepsilon},$$

nous donne

$$\left|\frac{\Delta^{(p)}}{\mathfrak{D}}\right| < \frac{M_p^{\omega+\varepsilon}}{M_i^{\omega-\omega'-\varepsilon}},$$

d'où, *a fortiori*,

$$(46) \qquad \left|\frac{\Delta^{(p)}}{\mathfrak{D}}\right| < M_p^{\omega'+\varepsilon},$$

puisque nous avons supposé m_i plus grand que m_p, et par suite M_i plus grand que M_p.

En un mot, on peut toujours supposer que le mineur $\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$ n'est autre que $\mathfrak{D}$.

Si nous envisageons le système des paramètres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_p$, définis par les équations (43), cette inégalité (46) montre que, pour tout indice n plus petit que chacun des entiers $m_0, \ldots, m_{p-1}$, on a

$$(47) \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \ldots + \alpha_{h-1} a_{n+h-1} \\ \qquad + \alpha_{h+1} a_{n+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{n+p} - a_{n+h} = \theta N^{\omega'+\varepsilon}. \end{array}\right.$$

28. Soit, à présent, un second déterminant principal $\Delta^{(p-1)}_{n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}}$, les indices $n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}$ étant tous très grands, mais cependant inférieurs aux indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$. A ce déterminant $\Delta^{(p-1)}_{n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}}$ correspond un déterminant $\mathfrak{D}'$ se déduisant du nouveau déterminant $\Delta^{(p-1)}$ comme $\mathfrak{D}$ se déduisait de l'ancien, en faisant intervenir un indice h que nous supposerons être le même dans les deux cas, conformément à ce qui a été dit plus haut. On peut, avec cette nouvelle série d'indices, former un système d'équations analogues aux équations (43)

$$(43') \qquad \left\{\begin{array}{l} a_{n_0+h} = \alpha'_0 a_{n_0} + \alpha'_1 a_{n_0+1} + \ldots + \alpha'_{h-1} a_{n_0+h-1} \\ \qquad\qquad + \alpha'_{h+1} a_{n_0+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{n_0+p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n_{p-1}+h} = \alpha'_0 a_{n_{p-1}} + \alpha'_1 a_{n_{p-1}+1} + \ldots + \alpha'_{h-1} a_{n_{p-1}+h-1} \\ \qquad\qquad + \alpha'_{h+1} a_{n_{p-1}+h+1} + \ldots + \alpha'_p a_{n_{p-1}+p}. \end{array}\right.$$

Si maintenant, dans l'équation (47), nous remplaçons n successivement par $n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}$, nous obtenons p nouvelles équations que le système (43′) permet de mettre sous la forme

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha_0-\alpha'_0)a_{n_0}+(\alpha_1-\alpha'_1)a_{n_0+1}+\ldots \\ &\quad+(\alpha_{h-1}-\alpha'_{h-1})a_{n_0+h-1}+(\alpha_{h+1}-\alpha'_{h+1})a_{n_0+h+1}+\ldots \\ &\qquad\qquad+(\alpha_p-\alpha'_p)a_{n_0+p}=\theta N_0^{\omega'+\varepsilon}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(\alpha_0-\alpha'_0)a_{n_{p-1}}+(\alpha_1-\alpha'_1)a_{n_{p-1}+1}+\ldots \\ &\quad+(\alpha_{h-1}-\alpha'_{h-1})a_{n_{p-1}+h-1}+(\alpha_{h+1}-\alpha_{h+1})a_{n_{p-1}+h+1}+\ldots \\ &\qquad\qquad+(\alpha_p-\alpha'_p)a_{n_{p-1}+p}=\theta N_{p-1}^{\omega'+\varepsilon}. \end{aligned}\right.$$

Résolvons ces équations par rapport à $\alpha_0-\alpha'_0, \alpha_1-\alpha'_1, \ldots, \alpha_p-\alpha'_p$: en ayant égard aux relations

$$\left|\frac{1}{\mathrm{D}'}\frac{\partial \mathrm{D}'}{\partial(i,k)}\right| = \frac{\theta}{N_i^{\omega-\varepsilon}},$$

nous voyons que, si n_0 est le plus petit des entiers $n_0, \ldots, n_{p-1}$, on a, pour chaque valeur de λ,

$$(49)\qquad \alpha_\lambda-\alpha'_\lambda=\frac{\theta}{N_0^{\omega-\omega'+\varepsilon}}.$$

Cette conclusion a été établie en supposant que tous les n sont plus petits que chacun des m. Mais elle subsiste pour tout système de valeurs suffisamment grandes des m et des n. Car on peut prendre un déterminant principal auxiliaire formé avec des indices plus grands à la fois que les m et que les n. Si $\alpha''_0, \ldots, \alpha''_{h-1}, \alpha''_{h+1}, \ldots, \alpha''_p$ désignant les quantités analogues aux α et aux α' calculées à l'aide de ce nouveau déterminant principal, l'équation (49), ayant lieu pour les différences $\alpha''_\lambda-\alpha_\lambda$ d'une part et $\alpha''_\lambda-\alpha'_\lambda$ d'autre part, est aussi vérifiée par $\alpha_\lambda-\alpha'_\lambda$.

Il en résulte que α_λ tend vers une limite quand les indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$ augmentent tous indéfiniment sans que le déterminant

$$\Delta^{(p-1)}_{m_0, m_1, \ldots m_{p-1}}$$

cesse d'être un déterminant principal.

La limite de α_λ étant désignée par $-A^{(p-\lambda)}$, on a, pour n très grand, la relation

$$(50)\qquad A^{(p)}a_n + A^{(p-1)}a_{n-1} + \ldots + A^{(0)}a_{n+p} + a_{n+h} = \theta N^{\omega'+\varepsilon},$$

car la quantité $N^{\omega'+\varepsilon}$, étant supérieure à

$$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \ldots + \alpha_p a_{n+p} - a_{n+h}$$

d'après la formule (47), est aussi supérieure à sa limite.

On en conclut tout d'abord que $A^{(0)}$ n'est pas nul, sans quoi, en raisonnant sur la formule (50) comme nous avons raisonné au n° **25** sur la formule (37), on démontrerait pour le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ une conclusion analogue à celle que nous y avons établie pour le déterminant $\Delta^{(p)}$, ce qui serait contraire à nos hypothèses. Le rapport $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\mathfrak{D}}$ tend donc vers une limite finie et différente de 0, et, par conséquent, la relation (46) subsiste en y remplaçant $\mathfrak{D}$ par $\Delta^{(p-1)}$. Comme toutes les propriétés précédentes découlent de cette relation combinée avec la formule (40), on peut substituer, dans les considérations que nous venons de développer, le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ au déterminant $\mathfrak{D}$, et supposer $h = p$. Dans ces conditions, la relation (50) devient

$$A^{(p)}a_n + A^{(p-1)}a_{n+1} + \ldots + A^{(1)}a_{n+p-1} + a_{n+p} = \theta N^{\omega'+\varepsilon}.$$

Cette relation n'étant autre que la relation (37), nous avons démontré que *la condition nécessaire trouvée au n° 25 est aussi suffisante*.

Pour obtenir les coefficients A, on voit qu'il faut choisir des déterminants principaux à indices de plus en plus élevés et résoudre les équations (43) correspondantes.

Nous nous étions bornés aux déterminants principaux pour lesquels l'indice h avait la même valeur; mais cette restriction n'a plus de raison d'être, puisque nous avons vu qu'on peut toujours supposer $h = p$.

En prenant comme valeurs approchées les quantités α calculées à l'aide d'un déterminant principal quelconque, on commet sur

chaque coefficient une erreur moindre que $\frac{1}{M_0^{\omega-\omega'-\varepsilon}}$, si m_υ est le plus petit des indices qui servent à former le déterminant principal.

Dans le cas où le nombre p est égal à 1, les déterminants $\Delta^{(p-1)}$ se réduisent aux coefficients a_m eux-mêmes. Si l'on écrit le polynôme φ sous la forme $\varphi = 1 - \frac{x}{x_0}$, on voit que x_0 est la limite de $\frac{a_m}{a_{m+1}}$, mais en se bornant aux valeurs principales de a_m, c'est-à-dire à celles pour lesquelles le rapport $\frac{L|a_m|}{LM}$ est très voisin de ω. Si l'on ne prenait pas cette précaution, on pourrait ne plus arriver au résultat cherché, ainsi que nous le constaterons sur un exemple.

Dans le cas simple par lequel nous avons commencé et qui correspond à l'hypothèse $\varphi(m) = e^m$, cette difficulté ne se présentait pas ; nous avons vu que tous les déterminants $\Delta^{(p-1)}$ à indices consécutifs étaient des déterminants principaux.

29. Les paramètres μ et α peuvent s'exprimer par des quotients de déterminants. On a déjà, en effet,

$$Q = \frac{\mathfrak{D}}{\left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial(i,k)}\right]}, \qquad \mu_h = \frac{Q}{\Delta^{(p-1)}} \frac{\partial \Delta^{(p-1)}}{\partial(i,h)}, \qquad \mu_k = \frac{Q}{\Delta^{(p-1)}} \frac{\partial \Delta^{(p-1)}}{\partial(i,k)},$$

et la résolution des équations (43) donne la valeur de α_k.

Ces expressions, reportées dans l'égalité (45), donnent une relation qui peut s'énoncer, d'une façon générale, sous la forme suivante :

Soit donné un tableau rectangulaire

$$(51) \qquad \left\{\begin{array}{llll} a_1, & b_1, & \ldots, & l_1, \\ a_2, & b_2, & \ldots, & l_2, \\ a_3, & b_3, & \ldots, & l_3, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p+1}, & b_{p+1}, & \ldots, & l_{p+1}, \end{array}\right.$$

comprenant p colonnes et $p+1$ lignes. En supprimant la première

ligne, on forme un déterminant d'ordre p :

$$\Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}.$$

En supprimant la seconde ligne, on forme de même le déterminant

$$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & \dots & l_3 \\ a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_4 & b_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix},$$

où nous avons interverti les lignes de façon que le déterminant $\Delta_{3,1}$ se déduise du déterminant $\Delta_{2,3}$ par une permutation circulaire effectuée entre les lignes première, seconde et troisième du tableau (51). Enfin la suppression de la troisième ligne fournit pareillement le déterminant

$$\Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ a_4 & b_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}.$$

Supprimons maintenant la deuxième et la troisième ligne, en même temps que la première colonne; puis la troisième et la première ligne; puis les deux premières; nous obtenons les trois déterminants d'ordre $p-1$

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ b_4 & c_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix},$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ b_4 & c_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix},$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ b_4 & c_4 & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, on aura

$$\Delta_{2,3}\,\delta_1 + \Delta_{3,1}\,\delta_2 + \Delta_{1,2}\,\delta_3 = 0.$$

Ce fait peut se ramener à un autre bien connu, en mettant à gauche du tableau (51) une colonne formée tout entière de zéros, à l'exception du troisième élément qui sera égal à 1. On obtient ainsi un déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & \dots & l_3 \\ 0 & a_4 & \dots & \dots & l_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}$$

égal à $\Delta_{1,2}$. Les mineurs relatifs aux deux premiers éléments nuls sont respectivement $\Delta_{2,3}$ et $\Delta_{3,1}$, tandis que les mineurs correspondant aux éléments a_1 et a_2 sont δ_2 et $-\delta_1$. Entre ces quatre mineurs existe bien la relation

$$-\Delta_{2,3}\,\delta_1 - \Delta_{3,1}\,\delta_2 = \Delta_{1,2}\,\delta_3,$$

car la suppression des deux premières lignes et des deux premières colonnes donne le déterminant δ_3.

30. On peut étendre la relation précédente à une substitution circulaire de $n+1$ lettres, n étant un entier quelconque au plus égal à p. Dans ce cas, il faudra, pour former le déterminant Δ, supprimer la $n+1^{\text{ième}}$ ligne, et, pour obtenir le déterminant δ, supprimer les n

premières lignes en même temps que les $n - 1$ premières colonnes du tableau (51). La somme des valeurs que prend le produit $\Delta\delta$, lorsqu'on permute circulairement les $n + 1$ premières lignes du tableau (51), est encore nulle si n est pair. Lorsque n est impair, il faut, pour obtenir une somme nulle, faire précéder les termes alternativement du signe $+$ et du signe $-$. En un mot, dans tous les cas, on multipliera chaque valeur par $+1$ ou par -1 suivant que la substitution qui a servi à l'obtenir appartient ou non au groupe alterné, et la somme

$$
S_{n,p} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & \dots & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & \dots & l_n \\ a_{n+2} & \dots & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} h_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \dots
$$

$$
+ (-1)^{\mu n} \begin{vmatrix} a_{n-\mu+2} & \dots & l_{n-\mu+2} \\ a_{n-\mu+3} & \dots & l_{n-\mu+3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-\mu} & \dots & l_{n-\mu} \\ a_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & l_{p-1} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} h_{n-\mu+1} & \dots & l_{n-\mu+1} \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1}. \end{vmatrix} + \dots
$$

$$
+ (-1)^{n} \begin{vmatrix} a_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} h_1 & \dots & l_1 \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}
$$

sera identiquement nulle.

Tout d'abord ceci a lieu pour $n = 2$, ainsi que nous venons de le voir. Pour $p = n$, le déterminant δ se réduit à un seul élément, et il vient

$$S_{n,n} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & l_n \end{vmatrix} l_{n+1} + (-1)^n \begin{vmatrix} a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & \dots & l_{n-1} \end{vmatrix} l_n$$

$$+ \begin{vmatrix} a_n & \dots & l_n \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & \dots & l_{n-2} \end{vmatrix} l_{n-1} + \dots = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & l_1 & l_1 \\ a_2 & \dots & l_2 & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} & l_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, si l'on veut démontrer notre proposition pour certaines valeurs de n et de p, on peut la supposer établie, d'une part pour les sommes $S_{n,p-1}$, d'autre part pour les sommes $S_{n-1,p-1}$.

Or la somme $S_{n,p}$ est une fonction linéaire et homogène de $a_1, \dots, a_{p+1}$.

a_1 est multiplié par la somme

$$\begin{vmatrix} b_2 & \dots & l_2 \\ b_3 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & l_n \\ b_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}$$

$$-(-1)^n \begin{vmatrix} b_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & \dots & l_{n-1} \\ b_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_n & \dots & l_n \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \dots,$$

qui est précisément une somme $S_{n-1,p-1}$; et il en est de même pour $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$.

Considérons maintenant un élément a dont l'indice soit supérieur à $n+1$, soit a_{p+1} par exemple. Pour avoir le coefficient de a_{p+1}, il faudra supprimer la dernière ligne et la première colonne dans le déterminant Δ et dans ses transformés. La dernière ligne du tableau (51) continuera à être représentée par les éléments $h_{p+1}, \ldots, l_{p+1}$ qui figurent dans le déterminant δ. On pourra développer encore par rapport à ces derniers éléments et l'on trouvera, pour le coefficient de chacun d'eux, une somme $S_{n,p-1}$.

Ces différents coefficients pouvant être supposés nuls, ainsi qu'il a été remarqué précédemment, il en est de même pour $S_{n,p}$, comme nous voulions le démontrer.

On pourrait même aller plus loin et, au lieu d'opérer simplement la substitution circulaire précédente, effectuer successivement toutes les substitutions d'un groupe de degré $n+1$ contenant cette substitution. La somme des valeurs du produit $\Delta\delta$, précédées chacune du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la substitution correspondante serait ou non alternée, s'annulerait toujours. Car, si Γ désigne le groupe formé par les puissances de notre substitution circulaire, on sait que les substitutions du groupe donné seront données par un tableau de la forme

$$\Gamma, \quad T_1\Gamma, \quad T_2\Gamma, \quad \ldots, \quad T_{r-1}\Gamma,$$

où $1, T_1, \ldots, T_{r-1}$ désignent r substitutions. Or, en appliquant à notre produit $\Delta\delta$ les substitutions $T_1\Gamma$, on obtient la transformée de $S_{n,p}$ par la substitution T (multipliée par $+1$ ou -1 suivant que T_1 est alternée ou non), et ainsi des autres. Ces différentes transformées étant nulles, puisque l'égalité $S_{n,p}=0$ est une identité, notre conclusion est établie. Par exemple, la somme considérée sera nulle pour tout groupe transitif de degré premier, car un pareil groupe contient toujours une substitution circulaire.

Enfin, au lieu du déterminant δ, on peut considérer un déterminant Δ' obtenu, non plus en supprimant $n-1$ colonnes du tableau (51), mais en lui laissant toutes ses colonnes et lui ajoutant $n-1$ lignes composées d'éléments arbitraires. Car ce déterminant est égal à une

somme de déterminants δ multipliés par des coefficients qui ne dépendent que des lignes ajoutées et, par suite, les conclusions obtenues pour le produit $\Delta\delta$ s'appliquent au produit $\Delta\Delta'$.

TROISIÈME PARTIE.

31. Dans cette troisième Partie, nous considérerons une série dont nous supposerons le rayon de convergence ramené à l'unité par la transformation (4), et nous rechercherons comment la nature des singularités est liée à l'ordre de grandeur des coefficients. C'est la marche qu'a suivie M. Darboux, dans le Mémoire précédemment cité *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*, en supposant d'abord que la fonction considérée admette, autour de chaque point singulier x_0, une partie principale de la forme $\frac{A}{(x-x_0)^\alpha}$, où α désigne un nombre compris entre 0 et 1. Il a étendu les résultats obtenus au cas de α quelconque, en partant des relations qui existent entre les coefficients d'une série et ceux des séries dérivées.

Pour appliquer des considérations analogues à des fonctions aussi générales que possible, nous utiliserons la notion de dérivée généralisée, telle que l'a présentée Riemann dans son Mémoire intitulé *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation* (¹).

Conformément aux conclusions de ce Mémoire (²), α étant un nombre quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, mais auquel nous ne donnerons cependant que des valeurs réelles, nous désignerons par le symbole $D_x^\alpha f(x)$ une fonction définie de la façon suivante :

1° Pour $\alpha = 0$

$$D_x^0 f(x) = f(x). \tag{52}$$

(¹) Riemann, *Œuvres complètes, Ed. Weber et Dedekind*, p. 331-344.

(²) Riemann introduit dans l'expression de $D_x^\alpha f(x)$ certains polynômes arbitraires que nous supprimons ici, parce qu'ils sont inutiles pour notre objet.

2° Si α est négatif, on prendra

$$(53)\qquad D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_k^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz,$$

l'intégration étant effectuée suivant un chemin rectiligne et k désignant un nombre tel que la fonction donnée soit régulière entre k et x. Dans l'étude actuelle, toutes les fonctions que nous considérerons étant régulières autour de l'origine, nous prendrons $k = 0$.

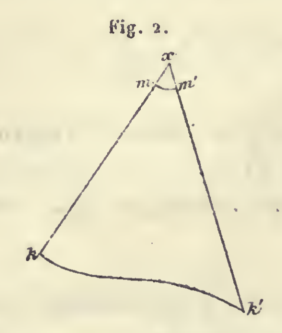
Au reste, il convient de remarquer que les intégrales

$$\int_k^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz \quad \text{et} \quad \int_{k'}^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz$$

se comportent de la même façon au point de vue des singularités (¹), ce qui est pour nous le plus important.

(¹) Soient, en effet, J et J' les deux intégrales en question, prises pour un point ordinaire x de la fonction. Joignons (*fig.* 2) les points k et k' par un chemin quelconque ne passant pas par le point x et ne coupant aucune des droites kx

Fig. 2.



et $k'x$. Enfin, du point x comme centre, décrivons entre ces deux mêmes droites un petit arc de cercle mm'. Nous formons ainsi un contour $kmm'k'k$ le long duquel l'intégrale de $(x-z)^{-\alpha-1}f(z)\,dz$ sera nulle si les points k, k', x ont été pris intérieurs au cercle de convergence. L'intégrale suivant mm' étant infiniment petite avec le rayon du cercle, on voit que la différence entre les intégrales J et J' est égale à l'intégrale $\int_k^{k'} (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz$, laquelle est holomorphe, excepté sur le chemin kk'.

3° Si α est positif, E désignant le plus petit entier qui comprend α, on calculera, d'après les formules (52) ou (53) la fonction $D_x^{\alpha-E} f(x)$, et l'on en prendra la dérivée d'ordre E à la façon ordinaire.

Si $f(x)$ est développée en série de la forme

$$(2) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

il est facile d'obtenir le développement de $D_x^\alpha f(x)$. Il suffit de partir des formules données par Riemann [1] pour la valeur de $D_x^\alpha x^m$. Nous écrirons de préférence le résultat obtenu sous la forme

$$(54) \qquad x^\alpha D_x^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^m.$$

32. La formule qui donne $D_x^\alpha x^m$ a été trouvée par Riemann en effectuant dans l'intégrale

$$D_x^\alpha x^m = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-z)^{-\alpha-1} z^m \, dz$$

la transformation $z = tx$, ce qui donne

$$D_x^\alpha x^m = \frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha-1} t^m \, dt,$$

et il est à remarquer que, dans l'intégrale qui figure au second membre, on donne à $(1-t)^{-\alpha-1}$ sa valeur réelle et positive; car c'est seulement à cette condition que cette intégrale est égale à $\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(m+1-\alpha)}$.

Si nous opérons la même transformation dans la formule (53), dans l'hypothèse $k = 0$, nous trouvons

$$(55) \qquad x^\alpha D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha-1} f(tx) \, dt.$$

On voit que cette nouvelle formule (55) a l'avantage de donner

---

[1] *Loc. cit.*, p. 343.

pour $x^\alpha D_x^\alpha f(x)$ une valeur parfaitement déterminée, puisque $(1-t)^{-\alpha-1}$ devra recevoir sa détermination réelle et positive.

55. Si nous posons $x = e^y$ et que nous formions le symbole D en considérant f comme fonction de y, nous obtenons une nouvelle expression, que nous désignons par la notation $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$.

L'intégrale (53) devient dans ces conditions

$$(56)\qquad \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_k^x (\mathrm{L}x - \mathrm{L}z)^{-\alpha-1} f(z)\, d\,\mathrm{L}z.$$

Nous supposerons la fonction f privée de son terme constant, autrement dit s'annulant à l'origine. L'intégrale précédente deviendra dès lors finie pour $k = 0$. En y posant $z = tx$, nous pourrons écrire, pour les valeurs négatives de α,

$$(57)\qquad \mathfrak{D}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^1 \left(\mathrm{L}\,\frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1} f(tx)\,\frac{dt}{t}.$$

Dans tous les cas, le développement en série de $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$ sera le suivant

$$(58)\qquad \mathfrak{D}_x^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m m^\alpha.$$

Pour α négatif, ce développement résulte de la formule connue

$$\int_0^1 \left(\mathrm{L}\,\frac{1}{t}\right)^{a-1} t^{m-1}\,dt = \frac{\Gamma(a)}{m^a}.$$

D'ailleurs, le développement de $\dfrac{df(x)}{d\,\mathrm{L}x} = xf'(x)$ se déduit bien de celui de $f(x)$ en multipliant le coefficient de x^m par m, d'où l'on conclut que le développement de $\dfrac{d^{\mathrm{E}} f(x)}{(d\,\mathrm{L}x)^{\mathrm{E}}}$ s'obtient en multipliant le coefficient de x^m par m^{E}. Le développement (58) est donc général.

De ce développement résulte que si f est développable en série autour de l'origine, on a toujours

$$\mathfrak{D}_x^\alpha \mathfrak{D}_x^\beta f(x) = \mathfrak{D}_x^{\alpha+\beta} f(x).$$

Nous remarquerons aussi qu'il n'existe qu'une seule fonction φ développable en série de Maclaurin et telle que $\mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x) = f(x)$: c'est la fonction

$$\varphi(x) = \mathcal{D}_x^{-\alpha} f(x).$$

34. Les développements (54) et (58) sont absolument convergents en même temps. Nous remarquerons, en effet, que le rapport des coefficients correspondants a pour limite 1.

Pour α entier et positif, ceci se reconnaît immédiatement, car la quantité $\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)}$ se réduit à un polynôme entier en m, de degré α.

Pour les valeurs de α non entières et positives, il suffit d'utiliser la valeur asymptotique de $\Gamma(m)$ pour m très grand: on trouve ainsi

$$(1+\varepsilon)\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} = e^{-\alpha}\frac{(m+1)^{m+\frac{1}{2}}}{(m+1-\alpha)^{m+\frac{1}{2}-\alpha}}$$
$$= e^{-\alpha}(m+1)^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{m+1-\alpha}\right)^{m+\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Le dernier facteur a pour limite e^α et détruit ainsi le premier lorsque m devient infini, de sorte qu'il reste bien

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} = m^\alpha(1+\varepsilon).$$

35. Les expressions (55) et (57) conduisent à envisager les opérations $x^\alpha D_x^\alpha f(x)$ et $\mathcal{D}_x^\alpha f(x)$ comme des cas particuliers de la transformation

$$\varphi(x) = \int_0^1 V(t) f(tx)\, dt, \tag{59}$$

laquelle présente, au point de vue qui nous occupe actuellement, des propriétés intéressantes [1].

---

[1] M. PINCHERLE (*Acta mathematica*, t. X, p. 153-182) a étudié la transformation $F(x) = \int \varphi(y) A(x, y)\, dy$. Mais il ne s'est pas placé au même point de vue

Convenons d'abord, pour fixer les idées, que l'intégrale soit prise suivant l'axe réel. Dans ce cas, la fonction $V(t)$ peut n'être définie que pour les valeurs réelles de t comprises entre o et 1. Il faudra seulement que l'intégrale $\int_0^1 |V(t)|\,dt$ ait une valeur finie M. Même, dans le cas ou f s annule pour $t=0$, il suffira que l'intégrale $\int |tV(t)|\,dt$ soit finie.

Donnons à x une valeur telle que la fonction donnée f soit régulière au point correspondant; que, de plus, la droite qui joint ce point à l'origine ne passe par aucun point singulier de f. Je dis que la nouvelle fonction φ sera régulière en ce point.

L'intégrale (59) donnera tout d'abord pour φ une valeur finie et déterminée. Si maintenant nous donnons à x un accroissement h, nous trouvons

$$\varphi(x+h)-\varphi x=\int_0^1 V(t)\,[f(tx+th)-f(tx)]\,dt.$$

Or on peut obtenir une expression de la quantité $f(tx+th)-f(tx)$ de la façon suivante. On a

$$f(tx+th)-f(tx)=\int_{tx}^{tx+th} f'(z)\,dz.$$

La fonction $f'(z)$ est, d'ailleurs, uniformément continue dans un triangle ayant pour sommet l'origine et comprenant le point x à son intérieur (*fig.* 3), de sorte que l'on peut, pour toute valeur de z située sur la droite qui joint le point tx au point $tx+th$, remplacer $f'(z)$ par $f'(tx)+\theta\varepsilon$, où θ est de module plus petit que 1 et ε un nombre que nous pouvons supposer aussi petit que nous le voulons,

---

que nous. Il considère cette expression « comme un algorithme appliqué au sujet variable $\varphi(y)$ et dont les propriétés essentielles dépendent de la fonction $A(x,y)$ ». C'est précisément, comme on le voit, l'inverse de ce qui est fait dans le texte.

si h est assez voisin de o, et cela indépendamment de la valeur donnée à t. Dans ces conditions, on a

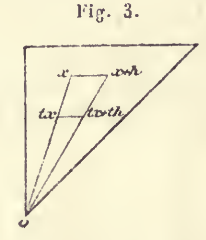
$$f(tx+th)-f(tx)=th[f'(tx)+\theta\varepsilon],$$

d'où

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\left[\int_0^1 t\mathrm{V}(t)f'(tx)\,dt+\theta\varepsilon\mathrm{M}\right].$$

La fonction φ a donc bien une dérivée et est, par suite, holomorphe au point considéré.

Fig. 3.



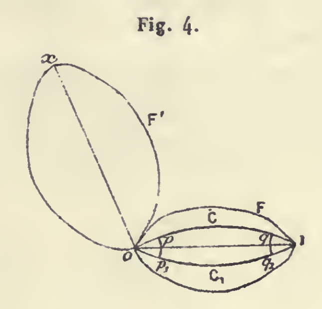
Les seules singularités de la fonction φ sont donc des coupures rectilignes tracées suivant les prolongements des droites qui joignent l'origine aux différents points singuliers de la fonction f.

36. Mais ces coupures elles-mêmes ne sont en général qu'apparentes et dues à la façon trop restreinte dont nous avons défini l'expression φ, en exigeant que l'intégration fût effectuée le long du chemin rectiligne. C'est un fait bien connu que les choses se passent tout autrement lorsqu'on conserve à la fonction toute sa généralité en laissant le chemin d'intégration indéterminé.

Soient tracées, par exemple, du point $x=0$ au point $x=1$, deux lignes quelconques situées de part et d'autre de l'axe réel (*fig.* 4), de façon à former un fuseau F. Supposons que la fonction $\mathrm{V}(t)$ soit holomorphe à l'intérieur de ce fuseau; supposons, de plus, que les produits $t\mathrm{V}(t)$ et $(1-t)\mathrm{V}(t)$ tendent vers o lorsque la variable t s'approche, par des chemins intérieurs au fuseau, de la valeur o pour le premier et de la valeur 1 pour le second, et cela de façon que l'intégrale $\int_0^1 |\mathrm{V}(t)||dt|$, prise le long d'une ligne rectifiable quelconque

intérieure au fuseau, soit finie [1]. Même, si l'on se borne à considérer les fonctions f, qui s'annulent pour $x = 0$, il suffira que ces propriétés appartiennent à la fonction $t\mathrm{V}(t)$, c'est-à-dire que les produits $t^2\mathrm{V}(t)$,

Fig. 4.



$t\mathrm{V}(1-t)$ tendent vers o avec t et que l'intégrale $\int_0^1 |t\mathrm{V}(t)||dt|$ ait une valeur finie.

Sur la ligne $(0, x)$ comme base (*fig.* 4) décrivons un fuseau F' semblable à F. Il peut arriver que ce fuseau F' ne renferme aucun point singulier de la fonction donnée. En ce cas, nous voyons d'abord que les intégrales (59) prises suivant deux chemins différents C et C_1 à l'intérieur du fuseau F sont égales. Il suffit, pour s'en rendre compte, de décrire, des points o et 1 comme centres, deux petits arcs de cercle coupant les chemins C et C_1, l'un aux points p et p_1, l'autre aux points q et q_1. L'intégrale de la fonction $\mathrm{V}(t)f(tx)$ le long du contour fermé pqq_1p_1p étant nulle, la différence des intégrales (pq) et (p_1q_1) est égale à la différence des intégrales (pp_1) et (qq_1), lesquelles tendent vers o avec les rayons des cercles, à cause des hypothèses faites sur la fonction V.

Nous pourrons donc considérer exclusivement l'intégrale prise sui-

---

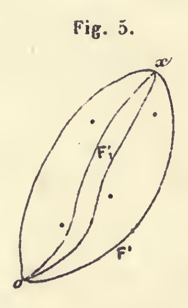
(1) Ceci arrivera, par exemple, toutes les fois que la fonction V sera, aux environs de l'origine, plus petite que $\frac{1}{t^\alpha}$ et, aux environs du point $t = 1$, plus petite que $\frac{1}{(1-t)^\alpha}$, l'exposant α étant plus petit que 1. Du reste, il faut remarquer que le mot *finie* signifie ici : finie pour chaque intégrale. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait une limite supérieure commune à toutes.

vant le chemin rectiligne, et les raisonnements donnés ci-dessus s'appliqueront sans modification.

Supposons maintenant que x soit toujours l'affixe d'un point ordinaire pour la fonction $f(x)$, mais que le fuseau F′ renferme des points singuliers de cette fonction.

Si la fonction f n'a que des points singuliers formant une suite ponctuelle, on pourra, à l'intérieur du fuseau F′, tracer un fuseau F'_1 (*fig.* 5) compris entre deux lignes allant du point o au point x, et

Fig. 5.



ne renfermant pas de point singulier. Soit F_1 le fuseau intérieur au fuseau F et qui correspond au fuseau F'_1. Nous prendrons l'intégrale (59), non plus suivant le chemin rectiligne, mais suivant un chemin C intérieur au fuseau F_1 et nous pourrons refaire les raisonnements précédents en désignant, cette fois, par M l'intégrale $\int_C |V(t)|\,|dt|$ (ou, si f s'annule avec x, l'intégrale $\int_C |tV(t)|\,|dt|$). La fonction représentée par l'intégrale (59) prise le long du chemin C est donc holomorphe autour du point considéré.

Ainsi, d'après notre nouvelle définition, la fonction φ devient en général multiforme, puisque sa valeur dépend du fuseau F'_1; mais elle n'a plus d'autres points singuliers que ceux de la fonction f.

37. Lorsque f est une fonction régulière à l'intérieur d'un certain cercle, si l'on ne considère que les points singuliers situés sur ce cercle, il est évidemment indifférent de considérer la fonction dans sa définition restreinte, ou, au contraire, dans toute sa généralité.

Dans ces conditions, le développement de φ est lié à celui de f par

des relations particulièrement simples. Il est clair, en effet, que le coefficient de x^m dans le développement de φ s'obtiendra en multipliant le coefficient correspondant a_m de f par la quantité

$$\mathfrak{S}_m = \int_0^1 V(t) t^m \, dt. \tag{60}$$

On peut donc former, et cela d'une infinité de manières, des suites de nombres par lesquels on peut multiplier les coefficients successifs d'une série sans changer ses points singuliers.

Soit, par exemple,

$$V(t) = \frac{1}{2it}\left[\frac{1}{\Gamma(1-i)}\left(L\frac{1}{t}\right)^{-i} - \frac{1}{\Gamma(1+i)}\left(L\frac{1}{t}\right)^{i}\right];$$

nous trouverons

$$\mathfrak{S}_m = \frac{m^{-1+i} - m^{-1-i}}{2i} = \frac{1}{m}\sin(Lm),$$

et, comme on peut, sans modifier les singularités, remplacer $f(x)$ par $xf'(x)$, nous pourrons prendre

$$\mathfrak{S}_m = \sin(Lm). \tag{61}$$

38. Cette valeur de $\mathfrak{S}_m$ va nous servir à démontrer un fait annoncé dans la première Partie (n° **7**), à savoir que la série (2) peut admettre pour point singulier unique sur le cercle de convergence le point x_0, sans que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tende vers x_0. En effet, puisque la transformation précédente conserve les points singuliers, nous aurons manifestement fourni la démonstration demandée si nous établissons que le rapport $\frac{\mathfrak{S}_{m+1}}{\mathfrak{S}_m}$ ne tend pas vers la limite 1 lorsque m augmente indéfiniment.

Nous considérerons, à cet effet, le résidu minimum de Lm par rapport à 2π, c'est-à-dire que nous poserons

$$Lm = 2k\pi + \psi,$$

k étant un entier et ψ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Il est facile de constater que ce résidu ψ pourra s'approcher autant

qu'on voudra d'un angle quelconque α. Car, si l'on prend k suffisamment grand, les quantités $e^{2k\pi+\alpha}$, $e^{2k\pi+\alpha+\varepsilon}$, dont la différence est égale au produit du nombre fixe $e^{\alpha+\varepsilon}-e^{\alpha}$ par le nombre très grand $e^{2k\pi}$, comprendront certainement un nombre entier, et même autant de nombres entiers qu'on le voudra.

En particulier, prenons $\alpha = 0$ et soient m et $m+1$ les deux entiers consécutifs qui comprennent le nombre $e^{2k\pi}$ Les valeurs de $\mathrm{L}m$ et de $\mathrm{L}(m+1)$ seront respectivement de la forme $e^{2k\pi-\varepsilon}$ ou $e^{2k\pi+\varepsilon}$, et par suite leurs sinus seront de signes contraires. La formule (61) donnera donc pour le rapport $\frac{\Theta_{m+1}}{\Theta_m}$ une valeur négative.

Envisageons maintenant le rapport $\frac{\Theta_{m+2}}{\Theta_{m+1}}$. D'après ce que nous savons sur $\mathrm{L}(m+1)$ et $\mathrm{L}(m+2)$, les sinus de ces deux quantités seront sensiblement égaux à $\mathrm{L}(m+1) - 2k\pi$ et $\mathrm{L}(m+2) - 2k\pi$. Or la quantité $\mathrm{L}\,\frac{m+2}{e^{2k\pi}}$ peut se remplacer elle-même, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, par $\frac{m+2}{e^{2k\pi}} - 1$, et, de même, à $\mathrm{L}\,\frac{m+1}{e^{2k\pi}}$ on peut substituer $\frac{m+1}{e^{2k\pi}} - 1$. Le rapport $\frac{\Theta_{m+2}}{\Theta_{m+1}}$ est donc infiniment peu différent de $\frac{m+2-e^{2k\pi}}{m+1-e^{2k\pi}}$, quantité évidemment supérieure à 2. De même, $\frac{\Theta_{m+3}}{\Theta_{m+2}}$ sera supérieur à $\frac{3}{2} - \varepsilon$, et ainsi de suite. Au contraire, $\frac{\Theta_m}{\Theta_{m-1}}$ pourra se remplacer par $\frac{e^{2k\pi}-m}{e^{2k\pi}-(m-1)}$, qui est plus petit que $\frac{1}{2}$, et l'on pourrait opérer d'une façon analogue pour $\frac{\Theta_{m-1}}{\Theta_{m-2}}$.

Ainsi nous voyons que ce rapport $\frac{\Theta_{m+1}}{\Theta_m}$ peut prendre, et cela aussi loin qu'on voudra dans la série, des valeurs plus grandes que $2-\varepsilon$, ou plus petites que $\frac{1}{2}+\varepsilon$, ou même négatives. Il est donc établi que ce rapport ne tend pas vers l'unité.

Si, par exemple, on part de la fonction $\frac{1}{1-x} = \Sigma x^m$, on en déduira par notre transformation la fonction

$$(62)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sin \mathrm{L}(m)\, x^m,$$

laquelle admettra pour point singulier unique le point $x = 1$, sans que le rapport de deux coefficients consécutifs ait pour limite l'unité.

On pourrait, il est vrai, objecter que la transformation (59), tout en n'introduisant aucun point singulier, peut avoir fait disparaître ceux qui existaient auparavant. Mais ici nous sommes assuré du contraire par la considération du cercle de convergence. Il résulte, en effet, de ce qui précède que $\sin Lm$ a une infinité de valeurs voisines de 1. Le rayon de convergence de la série (62) est donc égal à l'unité, et, par suite, la fonction qu'elle représente possède sur le cercle de rayon 1 un point singulier, lequel ne peut être, comme nous le savons, que le point $x = 1$.

39. Nous introduirons encore une notion préliminaire relative, celle-ci, aux fonctions continues et voisine de la notion connue de fonction à variation limitée.

Nous dirons qu'une fonction continue, réelle ou imaginaire, de la variable réelle x est *à écart fini* dans un intervalle (a, b), lorsque les intégrales $n\int \cos nx f(x)\,dx$ et $n\int \sin nx f(x)\,dx$, prises entre des limites quelconques intérieures à l'intervalle (a, b), restent finies et moindres en valeur absolue qu'une quantité fixe I lorsque n augmente indéfiniment. Cette quantité I sera dite *l'écart* de la fonction dans l'intervalle (a, b).

Une fonction à écart fini reste à écart fini lorsqu'on effectue un changement de variable tel que $x = \lambda x' + \mu$. Car cette transformation change les intégrales précédentes en d'autres qui en dépendent par des relations linéaires à coefficients finis.

Une fonction à variation limitée est nécessairement à écart fini. En particulier, une fonction est toujours à écart fini lorsqu'elle a une dérivée finie. En effet, soient a', b' deux nombres compris dans l'intervalle (a, b). Pour évaluer l'intégrale

$$\int_{a'}^{b'} n \cos nx f(x)\,dx = \int_{a'}^{b'} f(x)\,d(\sin nx),$$

nous décomposerons l'intervalle (a', b') en intervalles partiels dont chacun (les deux extrêmes exceptés) aille de $\frac{k\pi}{n}$ à $\frac{(k+1)\pi}{n}$. Dans cha-

cun de ces intervalles, nous pourrons remplacer f par $\mu_k + \theta\delta_k$, le nombre μ_k étant le minimum de f dans l'intervalle considéré, δ_k son oscillation, θ une quantité variable comprise entre o et 1. L'intégrale prise dans l'intervalle partiel se décompose donc en deux, dont l'une est nulle et l'autre plus petite en valeur absolue que δ_k. Pour les intervalles extrêmes, le minimum μ est infiniment voisin de $f(a')$ ou de $f(b')$; l'oscillation δ est infiniment petite, de sorte que l'intégrale est infiniment voisine de $f(a')\sin na'$ ou de $f(b')\sin nb'$. Notre intégrale totale est donc moindre en valeur absolue que

$$\sum \delta_k + |f(a')| + |f(b')|$$

et reste finie si la fonction donnée est à variation limitée.

On pourrait rechercher si l'inverse a nécessairement lieu, auquel cas la notion que nous introduisons se confondrait avec celle de fonction à variation limitée. En tout cas, elle est distincte de la notion de fonction continue, ce que nous constaterons sur la série (11) (1re Partie, n° **12**). M. Weierstrass a démontré que si, dans cette série, on fait $x = e^{i\theta}$, la partie réelle de l'expression ainsi obtenue est une fonction continue, mais non à variation limitée, de l'argument θ. Nous reconnaîtrons plus loin que cette fonction n'est pas non plus à écart fini.

En multipliant une fonction f à écart fini par une fonction continue ψ, qui varie toujours dans le même sens, on obtient encore une fonction à écart fini, et le nouvel écart est égal à l'ancien, multiplié par deux fois la plus grande valeur absolue que prenne le multiplicateur. C'est ce que l'on reconnaît en appliquant à l'intégrale

$$n\int \psi f \cos nx\, dx$$

le second théorème de la moyenne. Si la fonction ψ a un nombre fini de maxima et de minima, on obtiendra le nouvel écart en multipliant l'ancien par la plus grande valeur absolue de ψ et par le nombre des maxima et minima.

Une fonction est à écart fini pour une valeur de la variable, si l'on peut trouver un intervalle comprenant cette valeur et dans lequel la fonction soit à écart fini.

Lorsqu'une fonction n'est pas à écart fini dans un intervalle (a, b), c'est qu'il existe dans cet intervalle une ou plusieurs valeurs de x pour lesquelles la fonction n'est pas à écart fini. Ceci se voit à la manière ordinaire, en décomposant l'intervalle (a, b) en parties de plus en plus petites, de façon à former une double série de nombres tendant vers une limite commune.

Enfin, la notion d'écart se définit sans difficulté pour les fonctions de variable imaginaire. L'écart d'une fonction le long d'une portion de courbe donnée, de longueur l, sera l'écart de la même fonction considérée comme fonction de l'arc de cette courbe compté à partir de l'une des extrémités de la portion donnée et variant de o à l.

40. Cela posé, nous considérerons, ainsi que nous nous le sommes proposé, une fonction définie par la série (2), dont nous supposerons le rayon de convergence réduit à l'unité, et nous démontrerons tout d'abord la proposition suivante :

Si la série $\sum a_m$, formée par les coefficients de la série (2), est absolument convergente, et de telle façon que $m \mathrm{L} m a_m$ tende vers o, la fonction $f(x)$ sera finie, continue et à écart fini sur le cercle de convergence.

Les deux premières parties se voient immédiatement, la série (2) étant, dans les conditions de l'énoncé, uniformément convergente à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle.

Pour démontrer la troisième, nous désignerons par θ l'argument de la variable x qui décrit le cercle de rayon 1, et, au lieu des intégrales $n\int_\alpha^\beta \cos n\theta f(e^{i\theta})d\theta$, $n\int_\alpha^\beta \sin n\theta f(e^{i\theta})d\theta$, nous considérerons, ce qui revient évidemment au même, les expressions $n\int_\alpha^\beta e^{ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta$, $n\int_\alpha^\beta e^{-ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta$. La série (2) étant uniformément convergente, nous pouvons remplacer f par son développement et intégrer terme à terme. On trouvera ainsi, pour la première intégrale, la valeur $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{n}{m+n} a_m [e^{(m+n)i\beta} - e^{(m+n)i\alpha}]$, quantité plus petite que $2\mathrm{S}$, si S dé-

signe la somme de la série $\sum |a_m|$. La seconde intégrale prendra la forme $\sum\limits_{m \neq 0} \frac{n}{m-n} a_m [e^{(m-n)i\beta} - e^{(m-n)i\alpha}]$, où il faudra seulement, si n est un entier, remplacer le terme correspondant à $m = n$ par $na_n(\alpha - \beta)$.

Ayant choisi un nombre fixe k plus petit que 1 et un nombre fixe K plus grand que 1, nous diviserons les termes de la série en cinq parties.

La première partie comprendra tous les termes dont le rang est moindre que kn. Pour chacun de ces termes, la quantité $\frac{n}{m-n}$ est, en valeur absolue, moindre que $\frac{1}{1-k}$, de sorte que la somme partielle ainsi obtenue a un module inférieur à $\frac{2S}{1-k}$.

Tout pareillement, une seconde partie sera formée des termes à indices plus grands que Kn. La quantité $\frac{n}{m-n}$ étant alors constamment moindre que $\frac{1}{K-1}$, cette seconde partie sera inférieure à $\frac{2S}{K-1}$.

Nous isolerons, pour en former un troisième groupe, les deux termes dont les indices n_0 et n_0+1 comprennent le nombre n, ou le terme de rang n, si n est entier. Dans ce dernier cas, le terme correspondant de notre intégrale, étant égal à $na_n(\alpha - \beta)$, est très petit si n est très grand. Il en est de même dans la première hypothèse; car le nombre $n - n_0$, par exemple, est plus petit que 1, et, d'autre part, comme on peut évidemment, sans changer les expressions que nous avons à considérer, augmenter α ou β de $2k\pi$, la différence $\alpha - \beta$ peut être supposée inférieure à π en valeur absolue. La quantité

$$e^{(n_0-n)i\beta} - e^{(n_0-n)i\alpha} = 2ie^{(n_0-n)i\frac{\alpha+\beta}{2}} \sin \frac{(n_0-n)(\alpha-\beta)}{2}$$

aura son module moindre que $(n-n_0)(\alpha-\beta)$, ce qui, en multipliant par $\frac{na_{n_0}}{n_0-n}$, donne un produit moindre que $na_{n_0}(\alpha-\beta)$, et l'on arriverait à une conclusion analogue pour le terme de rang n_0+1.

Enfin, le quatrième groupe comprendra tout ce qui est intermédiaire entre le premier et le troisième; et le cinquième, les termes intermédiaires entre le troisième groupe et le deuxième. Les parties de nos

intégrales correspondant à ces deux groupes tendront vers o lorsque n augmentera indéfiniment. Soit, en effet, a_λ le plus grand coefficient qui fasse partie de l'un de ces groupes. Ce groupe donnera dans l'intégrale une partie moindre que $na_\lambda\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)$, où ν désigne le nombre des termes du groupe, lequel est, ainsi que λ, dans un rapport fini avec n. Or la quantité entre parenthèses est, comme l'on sait, de l'ordre de $L\nu$, et, par suite, le produit tend vers o; car nous avons supposé, en commençant, que $\lambda L\lambda . a_\lambda$ était nul pour λ infini. La seconde intégrale $\int_\alpha^\beta e^{-ni\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta$ est donc finie comme la première et notre proposition est établie.

Nous obtenons, en outre, une expression de l'écart. Cet écart est de la forme $k_1 S + k_2 \mu$, où k_1 et k_2 sont des nombres finis, μ désignant la plus grande valeur de $m L m\,|a_m|$:

Réciproquement, si la fonction f est finie, continue et à écart fini sur le cercle de convergence, la série formée par ses coefficients sera absolument convergente, ou si elle ne l'est pas, elle le deviendra lorsqu'on remplacera $f(x)$ par $\varpi_x^{-\varepsilon} f(x)$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le voudra, et la convergence ayant lieu de telle façon que $mLma_m$ tende vers o.

Pour démontrer cette réciproque, nous aurons recours aux expressions des coefficients sous forme d'intégrales définies

$$a_m = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)\,dz}{z^{m+1}},$$

l'intégrale étant prise suivant un cercle intérieur au cercle de convergence.

Tout d'abord, puisque la fonction donnée est finie et continue et par suite, comme on sait, uniformément continue à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle, on peut prendre l'intégrale sur le cercle même, la différence des intégrales prises sur les circonférences de rayons 1 et $1-\varepsilon$ étant infiniment petite avec ε. On a ainsi

$$2i\pi a_m = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-(m+1)i\theta}\,d\theta.$$

Or cette intégrale, si nous supposons la fonction à écart fini, est au plus de l'ordre de $\frac{1}{m}$. Si nous la multiplions par $\frac{1}{m^\varepsilon}$, ce qui revient à remplacer $f(x)$ par $\mathfrak{D}_x^{-\varepsilon} f(x)$ elle deviendra le terme général d une série absolument convergente dans les conditions indiquées.

Si l'on considère, par exemple, la série

$$(11) \qquad 1 + bx^c + \ldots + b^\nu x^{c^\nu} + \ldots,$$

dont il a été question précédemment, on voit que, si $|bc| > 1$, le module de a_m ne devient pas constamment plus petit que $\frac{1}{m}$, puisque, pour $m = c^\nu$, on a $ma_m = (bc)^\nu$. La fonction représentée par cette série n'est donc pas à écart fini sur le cercle de convergence. Elle ne l'est même sur aucun arc de ce cercle, sans quoi nous pourrions raisonner comme au n° **12** (première Partie) et montrer qu'elle serait également à écart fini sur tous les arcs se déduisant du premier par des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{c^h}$, lesquels, si petit que soit l'arc donné, recouvriront par leur ensemble la circonférence entière si h a été pris suffisamment grand.

De ceci nous pouvons également conclure que la fonction considérée, pour $|bc| > 1$, est à variation illimitée sur tout arc de cette circonférence, allant ainsi un peu plus loin que M. Weierstrass, lequel n'avait établi le fait que pour $|bc| > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

41. Des théorèmes précédents résulte que si f est finie, continue et à écart fini sur le cercle de convergence, il en est de même de toutes les fonctions $\mathfrak{D}_x^{-\alpha} f$ (où $\alpha > 0$).

Nous nommerons *ordre* de la fonction sur un arc du cercle de convergence le plus petit (¹) nombre ω tel que $\mathfrak{D}_x^{-\omega} f(x)$ soit, sur cet arc, fini, continu et à écart fini, ou le plus grand nombre tel que $\mathfrak{D}_x^{-\omega} f(x)$ ne remplisse point ces conditions; en un mot, un nombre tel que $\mathfrak{D}_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$ soit fini, continu et à écart fini, quel que soit le nombre

(¹) Ce mot est pris dans son sens algébrique; il n'est pas relatif à la valeur absolue.

positif ε, mais que l'une de ces propriétés fasse défaut à $\mathcal{D}_x^{-\omega+\varepsilon} f(x)$. Le nombre ω sera ainsi défini dans tous les cas; il pourra se faire qu'il soit égal à $\pm\infty$.

La somme de deux fonctions d'ordre ω est d'ordre au plus égal à ω; la somme de deux fonctions, l'une d'ordre ω, l'autre d'ordre moindre, est nécessairement d'ordre ω.

Si maintenant nous faisons intervenir les théorèmes que nous venons de démontrer, nous arrivons à cette nouvelle définition de l'ordre :

L'ordre d'une fonction f le long de son cercle de convergence est égal à la limite supérieure, pour m infini, de $\frac{\mathrm{L}|a_m|}{\mathrm{L}m}$, *augmentée d'une unité.*

Soit, en effet, $\omega - 1$ cette limite supérieure. On aura, à partir d'une valeur de m suffisamment grande,

$$|a_m| < m^{\omega+\frac{\varepsilon}{2}-1},$$

et, par suite, la fonction $\mathcal{D}_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$ satisfera aux conditions du n° **40**.

Au contraire, il existera une infinité de termes tels que le coefficient a_m soit supérieur à $m^{\omega-\varepsilon-1}$. La fonction $\mathcal{D}_x^{-\omega+\varepsilon} f(x)$ ne peut donc pas être finie, continue et à écart fini sur le cercle.

42. De la même façon que nous avons défini l'ordre sur un arc du cercle, nous pouvons définir l'ordre en un point x_0 de ce cercle : ce sera un nombre ω tel que $\mathcal{D}_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$ soit fini, continu et à écart fini autour du point x_0, mais non $\mathcal{D}_x^{-\omega+\varepsilon} f(x)$.

Les seuls points pour lesquels il y ait lieu de considérer l'ordre sont les points singuliers; en un point ordinaire l'ordre est manifestement égal à $-\infty$.

A la définition précédente on peut évidemment substituer celle-ci : une fonction sera d'ordre ω au point x_0 s'il existe un arc comprenant ce point et sur lequel la fonction soit d'ordre ω.

Une fonction d'ordre ω sur un arc quelconque présente sur cet arc au moins un point d'ordre ω, ainsi qu'on le reconnaît encore par le procédé qui consiste à diviser l'arc en parties de plus en plus petites.

La réciproque (¹) étant évidemment vraie, on peut énoncer la proposition suivante :

L'ordre d'une fonction sur un arc du cercle de convergence est égal au plus grand des ordres qu'elle prend aux différents points de cet arc,

à laquelle nous ajouterons :

Si une fonction présente aux environs de x_0 une infinité de points où l'ordre soit infiniment voisin de ω, son ordre au point x_0 est au moins égal à ω.

Enfin la liaison entre les ordres d'une fonction sur le cercle et sur ses différentes parties est encore montrée par le théorème suivant :

Une fonction d'ordre ω sur un arc déterminé et en ses points extrêmes peut être remplacée par une somme de deux fonctions, dont l'une est d'ordre égal à ω ou dépassant ω d'aussi peu qu'on le veut sur le cercle entier, et l'autre est holomorphe en tous les points de l'arc considéré.

Envisageons, en effet, la fonction $\varphi = \mathcal{D}_x^{-\omega-\varepsilon} f(x)$, qui est finie, continue et à écart fini sur l'arc donné. Par les deux extrémités de cet arc faisons passer une circonférence quelconque acb (*fig.* 6); puis, avec l'origine comme centre, décrivons un arc de cercle gd_1h de rayon $1-\eta$ (où η désigne un nombre positif infiniment petit). Les deux arcs de cercle, qui se coupent aux points g et h, délimitent une aire T où la fonction φ est holomorphe et où l'on peut lui appliquer la méthode de M. Appell. On aura ainsi

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

où

$$\varphi_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_{(gd_1h)} \frac{\varphi(z)}{z-x}\,dz,$$

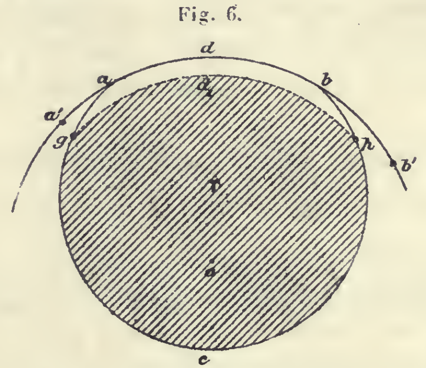
et

$$\varphi_2 = \frac{1}{2i\pi}\int_{(gch)} \frac{\varphi(z)}{z-x}\,dz.$$

(¹) C'est-à-dire qu'une fonction qui présente sur un arc un point d'ordre ω est, sur cet arc, d'ordre *au moins égal* à ω.

Mais dans ces égalités nous pouvons maintenant supposer que le cercle gd_1h ne soit autre que le cercle de rayon 1 lui-même; car si nous faisons tendre η vers 0, les intégrales φ_1 et φ_2 varieront continûment, puisque φ est continue.

Fig. 6.



La fonction φ_1 est alors développable en série de la forme $\Sigma\lambda_m x^m$, où λ_m est donné par la formule

$$\lambda_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{adb}\frac{\varphi(z)}{z^{m+1}}dz,$$

laquelle montre immédiatement, puisque $\varphi(z)$ est à écart fini, que le module de λ_m est plus petit que $\frac{k}{m}$, le nombre k étant fixe. D'ailleurs, φ_2 est aussi développable en série de Maclaurin, puisque c'est la différence de deux fonctions développables.

Formons maintenant les fonctions $f_1 = \mathfrak{D}_x^{\omega+\varepsilon}\varphi_1$ et $f_2 = \mathfrak{D}_x^{\omega+\varepsilon}\varphi_2$ dont la somme donnera la fonction f. La première est d'ordre $\omega + \varepsilon$ au plus sur le cercle entier, puisque le coefficient du terme en x^m, à savoir $\lambda_m m^{\omega+\varepsilon}$, est plus petit que $km^{\omega+\varepsilon-1}$. La seconde f_2 est holomorphe sur l'arc donné. Le théorème est donc démontré.

Il semble que le raisonnement précédent n'établisse pas la régularité de f_2 aux points a et b, extrémités de l'arc donné. Mais nous avons déjà remarqué que la fonction f, qui est d'ordre au plus égal à ω au point a, est nécessairement du même ordre sur un petit arc aa' contigu au point a. En opérant de même pour l'extrémité b et portant à la suite de l'arc ab un petit arc bb', on pourra refaire la démonstration en partant de l'arc $a'b'$, ce qui supprime toute difficulté.

43. Nous avons défini l'ordre en considérant $\mathfrak{D}_x^{-\omega} f(x)$. Mais à cette expression on peut tout aussi bien substituer $x^{-\omega} D_x^{-\omega} f(x)$, d'après ce que nous avons remarqué au n° **35**.

Cette dernière fonction nous sera plus commode pour l'étude que nous allons entreprendre maintenant, et qui consiste à rechercher comment l'ordre d'une fonction au point x_0 est lié à son ordre de grandeur autour de ce point. Mais cette étude ne sera pas également facile dans tous les cas.

Si, en effet, on suppose, par exemple, que notre fonction soit une somme de termes de la forme $\frac{A}{(x-x_0)^\alpha}$, où les α sont positifs, l'ordre au point x_0 sera nécessairement le plus grand des nombres α.

Il n'en sera pas de même dans les cas où l'ordre sera négatif et où notre fonction sera une somme de puissances positives de $x - x_0$. Car alors il peut se faire que le terme de moindre degré en $x - x_0$ soit un terme holomorphe qui n'aurait aucune influence sur l'ordre. Par exemple, la fonction $A(x-x_0) + B(x-x_0)^{\frac{3}{2}}$ n'est pas d'ordre -1, mais bien d'ordre $-\frac{3}{2}$. Aussi nos propositions fondamentales seront-elles établies exclusivement pour les ordres positifs, ce qui ne nous empêchera pas d'étendre leurs principales conséquences aux ordres quelconques.

En premier lieu, *si la fonction f a, sur un arc déterminé et à ses extrémités, un ordre inférieur au nombre positif* ω, *et que l'on décrive, avec un rayon voisin de l'unité, un arc de cercle limité aux mêmes rayons que le premier* (*fig.* 7) :

1° *Le produit* $(1-\rho)^\omega f(\rho e^{i\theta})$ *tend vers* 0, *et cela uniformément, quel que soit l'argument* θ, *pourvu que le rayon correspondant coupe l'arc donné;*

2° *Si* I *désigne l'écart sur l'arc de cercle de rayon* ρ, *le produit* $(1-\rho)^\omega \mathrm{I}$ *tend aussi vers* 0.

Supposons d'abord la fonction d'ordre moindre que ω sur le cercle entier. Le quotient $\frac{a_m}{m^{\omega-1}}$ tend vers 0 pour m augmentant indéfiniment. Si nous désignons par G_m^ω le coefficient de x^m dans le développement de $\frac{1}{(1-x)^\omega}$, nous pourrons dire encore que le quotient $\frac{a_m}{G_m^\omega}$ tend vers 0.

Car la quantité $G_m^\omega = \frac{1}{\Gamma(\omega)}\frac{\Gamma(m+\omega)}{\Gamma(m+1)}$ est comparable à $\frac{m^{\omega-1}}{\Gamma(\omega)}$, ainsi qu'on l'a vu au n° **35**. Si donc ε est un nombre donné aussi petit qu'on

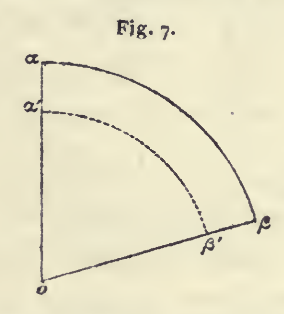


Fig. 7.

le veut, on a, à partir d'une certaine valeur m_0 de m,

$$|a_m| < \frac{\varepsilon}{2} G_m^\omega.$$

On peut admettre que cette inégalité est vérifiée aussi pour les valeurs de m inférieures à m_0, sauf à ajouter un polynôme $\mathfrak{P}(x)$ de degré m_0. La fonction f sera donc constamment plus petite que

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum \rho^m G_m^\omega + |\mathfrak{P}(x)|.$$

D'ailleurs $\sum \rho^m G_m^\omega$ étant égal à $\frac{1}{(1-\rho)^\omega}$, il viendra

$$(1-\rho)^\omega |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + (1-\rho)^\omega |\mathfrak{P}|.$$

Or le second membre de cette inégalité peut être rendu moindre que ε pour ρ suffisamment voisin de 1.

Quant à l'écart I de la fonction sur le cercle de rayon ρ, nous avons vu précédemment (n° **40**) qu'il est égal à $k_1 S + k_2 \mu$, en appelant S la série formée par les modules des termes de la série (2), et μ la plus grande valeur du produit $m L m |a_m| \rho^m$. On peut appliquer au premier terme S le raisonnement précédent, et l'on voit que le produit $(1-\rho)^\omega S$ tend vers 0.

Pour avoir une limite supérieure de μ, nous pourrons d'abord nous borner à considérer les valeurs de m supérieures à un entier déterminé quelconque; car, pour m fini, le produit $m\,\mathrm{L}m\,|a_m|\rho^m(1-\rho)^\omega$ tend évidemment vers 0. Or, pour m suffisamment grand, le module de a_m est moindre que $\frac{m^{\omega'-1}}{\mathrm{L}m}$, en appelant ω' un nombre plus petit que ω, mais plus grand que l'ordre de la fonction donnée. Si nous remplaçons ρ par $1-\eta$, nous voyons que nous avons à considérer la plus grande valeur de la quantité $(1-\eta)^m m^{\omega'}\eta^\omega$ et à rechercher ce que devient ce maximum lorsque η tend vers 0.

En écrivant que la quantité en question s'accroît par le changement de m en $m+1$, nous trouvons que m doit être plus petit que $\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{\frac{1}{\omega'}}-1}$. Si m_0 désigne le plus petit entier supérieur à cette limite, nous voyons que notre expression croît jusqu'à $m=m_0$ et décroît ensuite. Le maximum a donc lieu pour $m=m_0$. D'ailleurs, m_0 peut être remplacé par $\frac{\omega'}{\eta}$, à une erreur près qui reste finie pour η infiniment petit, et, par suite, ne peut altérer que dans un rapport fini le produit qui nous occupe. Ce dernier prend alors la forme

$$(1-\eta)^{\frac{\omega'}{\eta}}\left(\frac{\omega'}{\eta}\right)^{\omega'}\eta^\omega.$$

Le premier facteur a pour limite $e^{\omega'}$; le produit des deux autres tend vers 0. La seconde partie de notre théorème est donc aussi établie.

Nous avons, il est vrai, supposé que $f(x)$ est d'ordre moindre que ω sur le cercle entier; mais on ramène le cas général à celui-là en ajoutant une fonction holomorphe sur l'arc donné (n° **42**).

Si la quantité $\frac{a_m}{m^{\omega-1}}$, au lieu de tendre vers 0, avait une limite quelconque A, le raisonnement donné plus haut conduirait à ce résultat, que le produit $f(x)(1-x)^\omega$ aurait pour limite A [1] toutes les fois

---

[1] Ce théorème, pour le cas des séries réelles, a été établi par M. Appell (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII; 1878).

que x tendrait vers 1 par des valeurs telles que le rapport $\frac{|1-x|}{1-\rho}$ reste fini, ou, autrement dit, que la droite joignant le point variable au point d'affixe 1 fasse un angle fini avec la tangente au cercle de convergence en ce dernier point. Pour $\omega = 1$, et en posant $f(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x}$, ce fait revient au théorème connu [1] :

Si la série (2) *est convergente en un point x_0 du cercle et a pour somme* A, *sa valeur a pour limite* A, *lorsque x se rapproche de x_0 par des chemins faisant un angle fini avec le cercle.*

44. Inversement, *si les quantités* $(1-\rho)^\omega f(\rho e^{i\theta})$ *et* $(1-\rho)^\omega \mathrm{I}$ *restent finies et moindres qu'une quantité* A *lorsque l'on fait tendre* ρ *vers l'unité*, θ *variant entre* α *et* β, *la fonction est d'ordre au plus égal à* ω *sur l'arc* $\alpha\beta$ (*fig.* 7).

Pour le démontrer, on désignera par ω'' un nombre supérieur d'aussi peu qu'on voudra à ω, et l'on considérera la quantité

$$(63)\qquad x^{-\omega''} D_x^{-\omega''} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\omega'')} \int_0^1 (1-t)^{\omega''-1} f(tx)\, dt.$$

D'après les hypothèses actuelles, t étant différent de 1, le module de $f(x)$ est moindre que $\frac{A}{(1-t)^\omega}$, quelle que soit la valeur de x d'argument compris entre α et β, et de module inférieur ou même égal à 1. Il en résulte que l'intégrale précédente est finie et même uniformément finie, c'est-à-dire que l'intégrale $\frac{1}{\Gamma(\omega'')} \int_0^T (1-t)^{\omega''-1} f(tx)\, dt$ tend uniformément vers sa limite quand T tend vers 1. Or, pour T différent de 1, cette dernière intégrale est une fonction finie et continue de x dans les limites de variation précédentes. On peut, dès lors, refaire le raisonnement qu'on emploie à propos des séries uniformément convergentes [2] et conclure que ces propriétés de continuité subsistent pour $T = 1$.

---

[1] *Voir* Stoltz, *Allgemeine Arithmetik*, t. II.

[2] Au reste, on pourrait considérer cette intégrale comme une série, en la par-

L'écart de la fonction (63) sur l'arc $\alpha\beta$ se trouve en considérant l'expression

$$\frac{n}{\Gamma\omega''}\int_\alpha^\beta e^{\pm ni\theta}\int_0^1 (1-t)^{\omega''-1} f(te^{i\theta})\,dt.$$

Étant donnée la manière dont f devient infini aux environs du cercle de convergence, cette expression définit une intégrale double; nous pouvons donc renverser l'ordre des intégrations et écrire

$$\frac{1}{\Gamma(\omega'')}\int_0^1\left[(1-t)^{\omega''-1}\,dt\int_\alpha^\beta ne^{\pm ni\theta} f(te^{i\theta})\,d\theta\right].$$

Or l'intégrale qui multiplie $dt(1-t)^{\omega''-1}$ est inférieure à I, écart de la fonction f sur le cercle de rayon t, et, par conséquent, moindre que $\frac{A}{(1-t)^\omega}$, ce qui donne, pour l'intégrale finale, une valeur moindre que $\frac{A}{\Gamma(\omega'')(\omega''-\omega)}$.

Nous arrivons donc à cette conclusion que la fonction $x^{-\omega''}D_x^{-\omega''}f(x)$ est finie, continue et à écart fini sur l'arc $\alpha\beta$, et cela quand on choisit le nombre ω'' supérieur d'aussi peu qu'on le veut à ω; ce qui montre que f est bien d'ordre au plus égal à ω sur l'arc $\alpha\beta$.

45. Nous obtenons ainsi, comme on le voit, une nouvelle définition de l'ordre, du moins lorsque ce nombre est positif. Ce sera le plus petit nombre ω tel que les quantités $(1-\rho)^\omega f(\rho e^{i\theta})$ et $(1-\rho)^\omega$I restent finies quand ρ tend vers l'unité.

Multiplions maintenant la fonction f par une fonction ψ qui reste finie et continue dans le secteur qui a pour base l'arc $\alpha\beta$ (*fig.* 7), et dont les parties réelle et imaginaire aient chacune un nombre fini de maxima et de minima tant sur l'arc $\alpha\beta$ que sur les arcs correspondants des cercles concentriques et intérieurs. Le produit $(1-\rho)^\omega f(\rho e^{i\theta})$ restera fini après cette multiplication s'il l'était avant, et il en sera de

---

tageant en intégrales partielles prises entre les limites o et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{8}$, etc. On reconnaît facilement que la série formée par ces intégrales partielles est uniformément convergente.

même du produit $(1-\rho)^\omega I$; car nous savons (n° **39**) que l'écart sera multiplié simplement par le plus grand module de la fonction ψ dans l'intervalle considéré et par un nombre fini. L'ordre de f ne sera donc pas augmenté.

Il en sera encore de même si l'on multiplie la fonction f par $L(x-x_0)$, la quantité x_0 designant l'affixe d'un point situé sur le cercle de convergence; car les produits $(1-\rho)^\omega f$ et $(1-\rho)^\omega I$ seront multipliés par $L(1-\rho)$, lequel est moindre que toute puissance positive de $\frac{1}{1-\rho}$, quelque petit que soit l'exposant.

46. Ceci nous donne tout d'abord la détermination de l'ordre dans les cas les plus usuels.

En premier lieu, pour toute valeur négative de r, l'ordre de $(x-x_0)^r$ est évidemment égal à $-r$ au point x_0. Il en sera de même, d'après les remarques précédentes, pour les fonctions

$$(x-x_0)^r\psi, \quad (x-x_0)^r\psi\, L^h(x-x_0),$$

où ψ est une fonction satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus et h un entier quelconque. Du moins l'ordre de ces fonctions sera *au plus* égal à $-r$. Mais il faut remarquer que l'ordre de $(x-x_0)^r L^h(x-x_0)$ ne saurait être moindre que $-r$ (n° **45**).

Envisageons maintenant, pour une valeur positive de r, la fonction $(x-x_0)^r \mathfrak{P} L(x-x_0)$, où $\mathfrak{P}$ est un polynôme ([1]). Si r est un entier et que $\mathfrak{P}$ se réduise à une constante, la fonction est holomorphe. Dans le cas contraire, la dérivée de cette fonction sera de la forme $(x-x_0)^{r-1}\mathfrak{P}_1$, et, en général, la dérivée d'ordre E sera de la forme $(x-x_0)^{r-E}\mathfrak{P}_E$. Cette dernière expression, si E a été choisi supérieur à r, est de l'ordre $E-r$, puisqu'elle rentre dans celles qui viennent d'être étudiées. Il en résulte que la fonction donnée est de l'ordre $-r$.

Or le cas qui se présente le plus fréquemment est celui où la fonction non holomorphe au point x_0 se présente autour de ce point sous

---

([1]) L'expression $\mathfrak{P}$ pourrait d'ailleurs contenir des puissances négatives de $L(x-x_0)$ sans que nous ayons à modifier la suite de nos raisonnements.

la forme

$$\sum(x-x_0)^{r_i}\mathfrak{L}_i \mathrm{L}(x-x_0)+\sum(x-x_0)^{r_i+h_i}\psi_i,$$

où les r_i sont des nombres quelconques, positifs ou négatifs, les h_i des entiers positifs et les ψ_i des fonctions régulières. On voit alors que l'ordre de la première partie est égal au plus petit des nombres r_i changé de signe, en exceptant ceux pour lesquels $\mathfrak{L}_i$ se réduit à une constante, r_i étant un entier positif.

Quant à la seconde partie, elle ne modifie en aucune façon l'ordre, parce que la fonction $(x-x_0)^{r_i+h_i}\psi_i$ est d'ordre au plus égal à $-r_i-h_i$. Ceci résulte du théorème suivant :

47. *On ne saurait augmenter l'ordre d'une fonction sur un arc quelconque en la multipliant par une fonction holomorphe en tous les points de cet arc.*

On est même assuré que l'ordre n'a changé en aucune façon, si la fonction multiplicatrice ne s'annule en aucun point de l'arc.

En premier lieu, une fonction holomorphe jouissant de toutes les propriétés que nous avons indiquées pour les fonctions ψ, nous savons dejà que si l'ordre de la fonction donnée est positif, il ne pourra pas être augmenté par la multiplication. De plus le même raisonnement prouve que si l'ordre était plus petit qu'un nombre positif quelconque il ne peut devenir plus grand que ce même nombre. En particulier, s'il était négatif ou nul, il ne peut devenir positif.

Soit maintenant une fonction d'ordre négatif $-r$ sur l'arc $\alpha\beta$, que l'on multiplie par une fonction ψ régulière le long du même arc; soit E le plus petit entier supérieur à r, de sorte que la dérivée E^{ième} de ψ est d'ordre positif $\mathrm{E}-r$. La formule de Leibnitz nous donne pour la dérivée E^{ième} du produit $f\psi$ une somme de termes de la forme $\mathrm{D}_x^{\mathrm{E}-k}f.\mathrm{D}_x^k\psi$ multipliés par des coefficients numériques. Or, pour k différent de o, la dérivée $\mathrm{D}_x^{\mathrm{E}-k}f$ est d'ordre négatif ou nul, et reste telle après la multiplication par $\mathrm{D}_x^k\psi$, d'après la remarque qui vient d'être faite. Quant à $\mathrm{D}_x^{\mathrm{E}}f$, il a pour ordre le nombre $\mathrm{E}-r$, lequel est positif, et, par suite, n'est pas augmenté par la multiplication. La dérivée

$E^{\text{ième}}$ de $f\psi$ est donc bien au plus d'ordre $E - r$, de sorte que $f\psi$ lui-même ne peut être d'ordre supérieur à $-r$.

La seconde partie du théorème résulte de la première; car, si ψ ne s'annule pas sur l'arc donné, les deux fonctions ψ et f sont toutes deux holomorphes le long de cet arc, de sorte que l'ordre ne peut être ni augmenté ni diminué.

Enfin, nous énoncerons encore, dans le même ordre d'idées, une dernière proposition :

Quand on multiplie entre elles deux fonctions d'ordre positif, l'ordre du produit est au plus égal à la somme des ordres des facteurs.

Soient ω et ω' les deux ordres, que nous supposerons d'abord pris sur le cercle de convergence entier; ε un nombre positif très petit. Les coefficients de x^m dans les deux séries seront, à partir d'un certain rang, plus petits respectivement que $G_m^{\omega+\varepsilon}$ et $G_m^{\omega'+\varepsilon}$ (n° **45**). Supposons les coefficients moindres que les limites précédentes pour toutes les valeurs de m, ce que l'on peut faire en retranchant des deux séries des polynômes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ convenablement choisis.

La formule de multiplication des séries ne contient que les signes $+$ et $\times$, à l'exclusion de tout signe $-$. Le coefficient de x^m dans la série produit est donc moindre que le coefficient de x^m dans le produit $\frac{1}{(1-x)^{\omega+\varepsilon}}\frac{1}{(1-x)^{\omega'+\varepsilon}}$, c'est-à-dire que $G_m^{\omega+\omega'+2\varepsilon}$. Quant aux parties complémentaires provenant des polynômes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$, elles sont d'ordres ω et ω' au plus.

Si les ordres ω et ω' sont ceux des fonctions données sur une partie seulement du cercle, on les transformera en fonctions d'ordres inférieurs à $\omega+\varepsilon$ et $\omega'+\varepsilon$ sur le cercle entier par la soustraction de fonctions régulières (n° **40**). Ces dernières à leur tour, en vertu du théorème précédent, ne donnent dans la multiplication que des produits partiels d'ordres ω et ω' au plus. Le produit total est donc d'ordre moindre que $\omega+\omega'+2\varepsilon$. Notre théorème est par suite démontré, puisque ε peut être pris aussi petit qu'on le veut.

48. Les théorèmes précédents vont nous permettre de *calculer la*

valeur de la fonction donnée en un point ordinaire du cercle de convergence, pourvu toutefois que l'ordre sur ce cercle soit un nombre fini.

Soit, en effet, ω cet ordre supposé positif ([1]); soit x_0 un point ordinaire du cercle où la fonction ait la valeur A, de sorte qu'elle puisse se mettre sous la forme

$$A + (x - x_0)\psi, \tag{64}$$

ψ désignant une fonction régulière autour du point x_0.

Prenons un nombre ω' plus grand que ω et multiplions f par $\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}} = \sum x^m \dfrac{G_m^{\omega'}}{x_0^m}$. En tout point du cercle autre que x_0 l'ordre restera invariable, en vertu du n° **47**. Au point x_0 l'ordre sera donné par le terme $\dfrac{A}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$ et sera, par suite, plus grand que ω. Donc la partie principale des coefficients de $\dfrac{f}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$ provient de ce terme $\dfrac{A}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$, de sorte que le rapport des coefficients correspondants dans les développements de $\dfrac{f}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$ et de $\dfrac{A}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\omega'}}$, a pour limite l'unité. Il en résulte

$$A = \lim_{m=\infty} \frac{a_0 G_m^{\omega'} + a_1 x_0 G_{m-1}^{\omega'} + \ldots + a_m x_0^m}{G_m^{\omega'}}. \tag{65}$$

Il est clair que le second membre pourrait s'écrire sous forme d'une série, de sorte qu'on a la proposition suivante :

Théorème. — *Si la série* (2) *est d'ordre fini sur le cercle de convergence, on peut former une série de polynômes qui converge et représente la fonction, non seulement à l'intérieur du cercle, mais encore en tout point non singulier de la circonférence.*

([1]) Si ω était négatif, il devrait être remplacé par o dans les raisonnements qui suivent.

Soit, par exemple, $f(x) = \frac{1}{1-x}$. En prenant $\omega' = 2$, on trouve

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} (1 + 2x + 3x^2 \ldots + mx^{m-1}).$$

Si ω est plus petit que 1, on peut prendre $\omega' = 1$ et la formule (65) devient

$$A = \lim (a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_m x_0^m).$$

Notre méthode revient donc ici à la sommation directe de la série et nous retrouvons le théorème connu : *La série de Taylor est convergente sur le cercle tant que la fonction ne présente sur ce cercle que des points singuliers d'ordre inférieur à* 1.

Si l'on veut trouver le second terme du développement de f autour du point x_0, on commencera par retrancher A, après quoi on divisera non plus par $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\omega'}$, mais par $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\omega'+1}$, et ainsi de suite.

Cette méthode peut, d'ailleurs, s'étendre à certains points singuliers : tout d'abord ceux (d'ordre nécessairement négatif) où f est de la forme (64), la fonction ψ satisfaisant aux conditions énumérées au n° **45**. Supposons ensuite qu'en un point singulier notre fonction puisse se mettre sous la forme $\frac{A}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\alpha}} + f_1$, où f_1 est d'ordre moindre que α. Il suffira de diviser par $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\omega'-\alpha}$. Le terme f_1 donnera (n° **47**) un résultat d'ordre inférieur à ω' et, comme sur le reste du cercle la fonction n'est que de l'ordre ω, on obtiendra A par une formule analogue à la formule (65), mais où figurent au numérateur les quantités $G_m^{\omega'-\alpha}$ au lieu des quantités $G_m^{\omega'}$.

49. Recherchons maintenant s'il est possible d'abaisser l'ordre de notre fonction en la multipliant par le binôme $1 - \frac{x}{x_0}$.

Cette multiplication ne pouvant changer l'ordre qu'au point x_0 (n° **47**), ce point doit être un point singulier. Ce doit être un point isolé sur le cercle, ou du moins, s'il y a des points critiques infiniment voisins, leur ordre doit être moindre que celui de x_0 et en différer

d'une quantité finie; car l'ordre en un point voisin de x_0 ne peut être altéré par la multiplication, et s'il est infiniment voisin de ω, l'ordre au point x_0 ne peut être moindre que ω (n° **42**).

D'autre part, il est clair que la multiplication par $1 - \frac{x}{x_0}$ diminuera d'une unité l'ordre au point x_0 toutes les fois que f pourra se développer autour de x_0, comme nous l'avons indiqué au n° **46**, en une somme de termes de la forme

$$\sum (x - x_0)^{r_i} \varphi_i \,\mathrm{L}(x - x_0) + (x - x_0)^{r_i + h_i} \psi_i.$$

Il resterait à trouver une condition nécessaire et suffisante. En tout cas, on peut dire que si cette propriété a lieu pour $f(x)$, elle a lieu aussi pour toutes les fonctions $x^\alpha \mathrm{D}^\alpha f(x)$.

En effet, premièrement ceci est vrai pour $\alpha = 1$, car on a

$$\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f(x) = -\frac{f(x)}{x_0} + \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f'(x),$$

ce qui montre que si $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f(x)$ est d'ordre moindre que $f(x)$, de même $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) f'(x)$ sera d'ordre moindre que $f'(x)$ et inversement. De proche en proche, la conclusion s'étend à toutes les valeurs entières et positives de α.

D'ailleurs, pour α négatif, l'intégrale $\int_0^1 (1 - t)^{-\alpha - 1} f(tx) \left(1 - \frac{tx}{x_0}\right) dt$ peut s'écrire

$$(66) \quad \frac{x}{x_0} \int_0^1 (1 - t)^{-\alpha} f(tx)\, dt + \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \int_0^1 (1 - t)^{-\alpha - 1} f(tx)\, dt.$$

Si donc $f(x)\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$ est d'ordre moindre que l'ordre ω de $f(x)$, l'expression (66) est d'ordre moindre que $\omega + \alpha$ et, comme il en est de même de son premier terme, il en est aussi de même du second. Inversement si, $f(x)$ étant d'ordre ω, la fonction $\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) x^\alpha \mathrm{D}_x^\alpha f(x)$ est d'ordre moindre que $\omega + \alpha$, le produit de $f(x)$ par $1 - \frac{x}{x_0}$ sera d'ordre moindre que ω.

Étant démontrée pour α négatif et pour α positif et entier, notre proposition est générale.

50. Quoi qu'il en soit, supposons que, $f(x)$ étant d'ordre ω, tous les points singuliers d'ordre ω appartiennent à la classe que nous venons de considérer.

On abaissera l'ordre de tous ces points et, par suite, l'ordre de la fonction sur le cercle en multipliant notre fonction par le polynôme

$$\mathfrak{P} = \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_{p-1}}\right),$$

qui a pour racines les affixes de ces points singuliers.

Dès lors la recherche de ces points singuliers est ramenée à un problème que nous avons traité dans la deuxième Partie (n^{os} **25** et suivants). La fonction M, qui figure dans l'énoncé du n° **25**, est ici égale à m. D'après les conclusions auxquelles nous sommes parvenu en cet endroit, *il faudra former avec* $p+1$ *indices* $m_0, m_1, \ldots, m_p$ *un déterminant* $\Delta^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}$, *considérer la plus petite des quantités* $\frac{1}{\mathrm{L}m}\mathrm{L}\left|\frac{\Delta^{(p)}}{\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}}\right|$ *et rechercher la limite supérieure du quotient ainsi obtenu pour* $m_0, \ldots, m_p$ *infinis. Si l'on fait cette opération pour* $p = 1, 2, \ldots$, *la première valeur de* p *qui donnera un résultat moindre que* $\omega - 1$ *sera égale au nombre des points singuliers d'ordre* ω. On trouvera, d'ailleurs, ces points eux-mêmes, ainsi qu'il a été indiqué au n° **28**.

Si l'on a $p = 1$, l'affixe x_0 du point singulier sera, comme nous l'avons vu, la limite du rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$, mais en ne prenant que les valeurs principales de a_m.

Si cependant, autour du point x_0, la fonction pouvait se remplacer par $\frac{\mathrm{A}}{(x-x_0)^\omega}$, augmenté d'une fonction d'ordre moindre que ω, le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tendrait régulièrement vers x_0. Mais il n'en est pas nécessairement ainsi. Nous en avons vu un exemple dans la fonction

$$(62) \qquad \sum \sin \mathrm{L}m x^m,$$

qui admet pour point singulier unique le point $x = 1$. Ce point appartient bien d'ailleurs à la classe qui a été considérée au numéro précédent; car, si l'on multiplie la fonction par $1 - x$, le coefficient de x^m deviendra

$$\sin \mathrm{L} m - \sin \mathrm{L}(m-1) = 2 \cos \frac{1}{2} \mathrm{L}[m(m-1)] \sin \frac{1}{2} \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{m-1}\right);$$

le dernier facteur est de l'ordre de $\frac{1}{m}$, alors que les autres donnent un produit plus petit que 2. Après la multiplication par $1 - x$, la fonction (62) est donc devenue d'ordre 0, tandis qu'elle était d'ordre 1 auparavant. Malgré cela, nous avons constaté que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ ne tendait pas vers l'unité.

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (¹);

Par M. J. HADAMARD.

---

1. La décomposition d'une fonction entière $F(x)$ en facteurs primaires, d'après la méthode de M. Weierstrass,

$$F(x) = e^{G(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right) e^{Q_p(x)} \tag{1}$$

a conduit à la notion du genre de la fonction F.

On dit que F est du genre E si, dans le second membre de l'équation (1), tous les polynômes Q_p sont de degré E, et que la fonction entière $G(x)$ se réduise également à un polynôme de degré E au plus.

Dans un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France* (²), M. Poincaré a démontré une propriété des fonctions de genre E. L'énoncé auquel il est parvenu est le suivant :

Dans une fonction entière de genre E, *le coefficient de* x^m, *mul-*

(¹) Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un travail couronné en 1892 (grand prix des Sciences mathématiques).

(²) Année 1883, pages 136 et suiv.

tiplié par la racine $E + 1^{\text{ième}}$ *du produit des* m *premiers nombres, tend vers zéro quand* m *croît indéfiniment.*

Je me propose de compléter ce théorème en étudiant, d'une façon générale, les relations qui lient les propriétés d'une fonction entière à la loi de décroissance des coefficients et, particulièrement, en démontrant la proposition inverse :

Si le coefficient de x^m *est moindre que* $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, *la fonction est, en général, de genre moindre que* λ.

PREMIÈRE PARTIE.

RELATIONS ENTRE LA LOI DE DÉCROISSANCE DES COEFFICIENTS ET L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA FONCTION POUR LES GRANDES VALEURS DE LA VARIABLE.

2. Le développement taylorien d'une fonction entière est caractérisé (¹) par cette circonstance que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Si donc une fonction entière $F(x)$ est donnée par le développement

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

le module de a_m peut être représenté par $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$, où $\varphi(m)$ est positif et infini avec m.

Pour obtenir une quantité supérieure au module de $F(x)$, nous remplacerons chaque terme de la série (2) par son module, de sorte que nous pourrons considérer a_m comme égal à $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ et x comme réel et positif.

(¹) HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, nº 6 (ce Journal, 4ᵉ série, t. VIII).

Nous supposerons, en outre, que $\varphi(m)$ est une fonction continue et croissante, avec cette condition que $L\varphi(m) + \frac{k}{m}$ soit, à partir d'une certaine valeur de m, constamment croissant, quel que soit le nombre k.

Dans les cas usuels, ces hypothèses se trouvent vérifiées d'elles-mêmes; mais on peut les supposer vérifiées dans le cas le plus général, à la condition de remplacer, d'une manière convenable, certains coefficients a_m par des nombres plus grands, ce qui est permis, puisque nous agrandissons ainsi la somme de la série (2).

En un mot, on peut déterminer une fonction $\chi(m)$ au plus égale, pour les valeurs entières de m, au module de a_m (l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs) et telle que la fonction

$$(3) \qquad \varphi(m) = \sqrt[m]{\chi(m)}$$

satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer.

3. A cet effet, soit a_{m_0} le premier coefficient non nul. La quantité $\left|\sqrt[m-m_0]{\frac{a_m}{a_{m_0}}}\right|$, diminuant indéfiniment à mesure que m augmente, doit prendre nécessairement une valeur plus grande que toutes les autres. Soit m_1 l'indice correspondant. Pour les valeurs entières de m comprises entre m_0 et m_1, nous prendrons comme valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_0}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_1}|}$, dont la raison sera, par suite, $\left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$; ce qui revient (en faisant intervenir non seulement les valeurs entières de m, mais les valeurs fractionnaires ou incommensurables) à prendre pour $\chi(m)$ une certaine exponentielle de la forme e^{am-b}, où l'on aura $a = \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$.

Soit de même m_2 l'indice plus grand que m_1 pour lequel la quantité $\left|\sqrt[m-m_1]{\frac{a_m}{a_{m_1}}}\right|$ prend la plus grande valeur. Entre $m = m_1$ et $m = m_2$, on prendra pour valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progres-

sion géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_1}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_2}|}$. La raison de cette progression, à savoir $\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right|$, sera plus grande que la précédente, car l'inégalité

$$\left|\sqrt[m_2-m_0]{\frac{a_{m_2}}{a_{m_0}}}\right| < \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_0}}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_1-m_0}\left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}\right|^{m_1-m_0} > \left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_2-m_0}$$

peut s'écrire

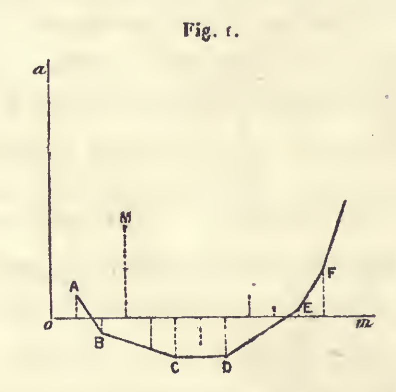
$$\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right| > \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|.$$

On considérera ensuite la valeur m_3 de m pour laquelle $\left|\sqrt[m-m_2]{\frac{a_m}{a_{m_2}}}\right|$ sera le plus grand, et l'on continuera ainsi indéfiniment.

4. Au reste, ces opérations peuvent se ramener à la construction bien connue du polygone de Newton.

Pour cela on considérera m comme l'abscisse d'un point M (*fig.* 1) dont l'ordonnée sera fournie par la valeur correspondante de $\mathrm{L}\left|\frac{1}{a_m}\right|$.

Fig. 1.



Nous aurons ainsi une suite indéfinie de points représentant les différents coefficients de notre série.

Prenons alors une demi-droite, tout d'abord parallèle à la partie négative de l'axe des y, et que nous ferons tourner autour du premier

point représentatif dans le sens trigonométrique jusqu'à ce qu'elle passe par un ou plusieurs des points suivants. Ce sera le premier côté AB de notre polygone. Pour obtenir le second, nous considérerons une droite issue du point B et que nous ferons tourner autour de ce point, etc.

Continuant ainsi à la manière ordinaire, nous tracerons une ligne brisée convexe ABC... d'une infinité de côtés, qui passera par une infinité de points représentatifs et laissera tous les autres en dessus. Les coefficients angulaires des côtés pourront être d'abord négatifs; mais, à partir d'un certain moment, ils deviendront nécessairement positifs et même de plus en plus grands.

L'ordonnée de cette ligne brisée représente le logarithme de la fonction $\chi(m)$ définie au numéro précédent, et le coefficient angulaire de OM donne la valeur de $L\varphi(m)$.

5. Nous voyons tout d'abord que $\chi(m)$ est une fonction croissante, et de manière que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit aussi croissant. Il en résulte que la fonction $\varphi(m)$, laquelle a une dérivée, sauf en des points isolés (¹), est elle-même constamment et indéfiniment croissante.

En outre, m_0 étant un entier quelconque, la fonction $L\chi(m)$ est, entre $m = m_0$ et $m = m_0 + 1$, de la forme $am - b$, où

$$\begin{aligned} a &= L\chi(m_0+1) - L\chi(m_0), \\ b &= -(m_0+1)L\chi(m_0) + m_0 L\chi(m_0+1) \\ &= m_0(m_0+1)[L\varphi(m_0+1) - L\varphi(m_0)]. \end{aligned}$$

$L\varphi(m)$ étant par suite de la forme $a - \frac{b}{m}$, la quantité $L\varphi + \frac{k}{m}$ sera

(¹) Si l'on voulait que χ et par suite φ aient une dérivée pour toute valeur de m (ce qui n'est pas nécessaire pour la suite), il suffirait de circonscrire au polygone ABC... une courbe convexe, ce qui est évidemment possible, par exemple à l'aide d'arcs de coniques se raccordant entre eux aux sommets successifs. On verrait aisément que les autres propriétés des fonctions χ et φ subsisteraient dans ces nouvelles conditions.

croissante si $b > k$. Ceci devant être vrai quel que soit le nombre k, pourvu que l'on prenne m_0 assez grand, nous avons à montrer que b augmente indéfiniment avec m_0.

Or b est constamment croissant, car l'inégalité

$$m\mathrm{L}\chi(m+1)-(m+1)\mathrm{L}\chi(m)\geqq(m-1)\mathrm{L}\chi(m)-m\mathrm{L}\chi(m-1)$$

est équivalente à l'inégalité

$$\mathrm{L}\chi(m+1)-\mathrm{L}\chi(m)\geqq\mathrm{L}\chi(m)-\mathrm{L}\chi(m-1).$$

D'ailleurs, si b restait inférieur à une quantité fixe k, on aurait

$$\mathrm{L}\varphi(m+1)-\mathrm{L}\varphi(m)<\frac{k}{m(m+1)}$$

et, comme le second membre est le terme général d'une série convergente, φ serait fini pour m infini, ce qui est contraire à nos hypothèses.

La fonction φ, définie comme il vient d'être dit, remplit donc les conditions que nous nous sommes imposées. Nous remarquerons que, moyennant ces conditions, λ étant un nombre fixe supérieur d'aussi peu que l'on veut à l'unité, on a, pour les grandes valeurs de m,

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)}>1+\frac{1}{m}, \tag{4}$$

car la fonction

$$\mathrm{L}\varphi(tm)-\mathrm{L}\varphi(m)+\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{1}{tm}-\frac{1}{m}\right),$$

considérée comme fonction de t, est croissante, d'après nos hypothèses, à partir de $t=1$, si m a été pris suffisamment grand. Étant nulle pour $t=1$, elle sera positive pour $t=\lambda$, d'où résulte

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)}>e^{m}>1+\frac{1}{m}.$$

6. Cela posé, soit $\psi(x)$ la fonction inverse de φ, qui est également une fonction positive, continue et croissante d'une variable positive.

Je dis que $F(x)$ *croît moins vite que* $x^\varepsilon e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Pour le démontrer, soit x' un nombre supérieur à x. Dans la série qui représente $F(x')$, considérons le dernier terme qui soit plus grand que 1, c'est-à-dire tel que $\varphi(m) < x'$. Son rang m_0 sera le plus grand entier contenu dans $\psi(x')$.

Ayant isolé les m_0 premiers termes pour en former un premier groupe, nous séparerons un second groupe allant depuis $m = m_0 + 1$ jusqu'à la plus grande valeur de m qui satisfasse à l'inégalité

$$\varphi(m) < x'\left(1 + \frac{1}{m_0}\right),$$

valeur qui sera désignée par m_1.

Le nombre m_0 augmentant indéfiniment avec x, le rapport $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers l'unité, car l'inégalité (4) montre que ce rapport ne saurait demeurer supérieur à aucun nombre λ plus grand que 1.

Enfin un troisième groupe comprendra ce qui reste de la série depuis le terme de rang $m_1 + 1$ jusqu'à l'infini.

Dans la combinaison $F(x') - \left(\frac{x'}{x}\right)^{m_0} F(x)$, les m_0 premiers termes donneront une somme négative. Quant aux termes suivants, le terme en x'^{m_0+h} donnera

$$a_{m_0+h} x'^{m_0+h}\left[1 - \left(\frac{x}{x'}\right)^h\right].$$

Remplaçons $\left(\frac{x}{x'}\right)^h = e^{-hL\left(\frac{x'}{x}\right)}$ par la quantité plus petite $1 - hL\left(\frac{x'}{x}\right)$; nous voyons qu'il nous reste le produit de $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ par une somme de termes de la forme $h a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$.

Considérons d'abord les termes du deuxième groupe. $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ étant inférieur à 1, la somme correspondante sera moindre que $\frac{(m_1 - m_0)^2}{2}$. Or nous pouvons supposer que $F(x')$ est supérieur à

$$e^{\int \frac{\psi x'}{x'} dx'} = e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm},$$

sans quoi le théorème serait démontré; et nous allons voir que dans ces conditions le rapport $\frac{(m_1 - m_0)^2}{F(x')}$ tend vers zéro.

D'abord il nous suffit de nous occuper de $\frac{m_0^2}{F(x')}$, puisque $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers 1. Or la quantité $\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}$ est, à partir d'un certain moment, plus grande que $\frac{3}{m}$, puisque la fonction $L\varphi(m) + \frac{3}{m}$ est croissante. Par suite l'intégrale $e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}$ est plus grande que Am^3, A étant une constante différente de o. $F(x')$ étant supposé plus grand que $e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}$, le rapport $\frac{m_0^2}{F(x')}$ tend bien vers zéro.

Dans les termes du troisième groupe, $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ est moindre que $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{m_0}}\right)^{m_0+h}$ Ces termes donnent donc une somme inférieure à la somme $\sum_{h=0}^{\infty} h \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m_0}\right)^h} = (m_0 + 1)^2$, laquelle est, comme la précédente, de la forme $\varepsilon F(x')$; de sorte que l'on peut écrire

$$F(x')\left[1 - \varepsilon L\left(\frac{x'}{x}\right)\right] > F(x)\left(\frac{x'}{x}\right)^{\psi(x')}.$$

Prenons les logarithmes, divisons par $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ et faisons tendre x' vers x, nous aurons

$$\frac{dLF(x)}{dLx} < \psi(x) + \varepsilon, \tag{5}$$

ce qui, en intégrant, donne bien [1]

$$F(x) < Ax^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}, \tag{6}$$

A étant fini.

[1] Plus exactement, nous voyons que, pour les valeurs de x plus grandes qu'une certaine limite, ou bien $F(x)$ est moindre que $e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, ou bien on a l'inégalité (5). Ceci suffit manifestement pour que l'inégalité (6) soit constamment vérifiée.

Par exemple, pour la fonction

$$(7) \qquad \mathfrak{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2} x^m, \qquad |q| < 1$$

$\Big[$qui est une moitié du développement d'une fonction $\theta(z)$ où l'on aurait posé $e^{2i\pi\frac{z}{\omega}} = x\Big]$, on a

$$\varphi(m) = r^{m}$$

$\left(\right.$en désignant par r le module de $\left.\frac{1}{q}\right)$; d'où

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}.$$

En appliquant le théorème précédent, on voit que $\mathfrak{F}(x)$ augmente indéfiniment moins vite que $e^{\int \frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}\frac{dx}{x}} = e^{\frac{\mathrm{L}^2 x}{2\mathrm{L}r}}$, ce qui est bien conforme aux résultats fournis par la théorie des fonctions elliptiques ([1]).

7. Envisageons en particulier le cas où l'on a

$$(8) \qquad |a_m| \leqq \frac{1}{(m!)^{\alpha}},$$

α étant un nombre positif quelconque.

Les formules connues pour l'approximation de la fonction Γ nous montrent que cette expression est de la forme

$$\frac{ke^{(m+1)\alpha}}{(m+1)^{\alpha\left(m+\frac{3}{2}\right)}},$$

([1]) Les formules connues correspondant à l'addition des périodes dans la fonction θ donnent

$$\mathfrak{F}(x) < \mathrm{A}e^{\frac{\mathrm{L}^2 x}{4\mathrm{L}r}}$$

La limite donnée par le théorème précédent est donc un peu trop élevée, ce dont il sera rendu compte plus loin.

k étant fini, de sorte que nous pouvons prendre

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{H}\right)^{\alpha},$$

H étant une constante.

$\psi(x)$ sera de la forme $Hx^{\frac{1}{\alpha}}$ et l'intégrale $\int \frac{\psi(x)+\varepsilon}{x}\,dx$ aura la même forme. Nous arrivons donc à l'énoncé suivant :

Si le coefficient de x^m est moindre que $\frac{1}{(m\,!)^{\alpha}}$, la fonction croît moins vite que $e^{Hx^{\frac{1}{\alpha}}}$, où H *est une certaine constante.*

8. Au reste, dans ce cas particulier, on arriverait à la même conclusion par la comparaison directe des deux séries

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)}$$

$\Big($laquelle, en vertu des propriétés de la fonction Γ, peut être substituée dans notre raisonnement à $\sum \frac{x^m}{(m\,!)^{\alpha}}\Big)$, et

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum \frac{x^{\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma(1+n)}.$$

En posant $\frac{n}{\alpha} = m'$ et comparant les parties des deux séries qui correspondent aux valeurs de m et de m' comprises entre les mêmes limites, on reconnaît aisément que, pour $\alpha > 1$, on a

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < e^{x^{\frac{1}{\alpha}}};$$

et, pour $\alpha < 1$,

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < E\left(\frac{1}{\alpha}\right) x^{\frac{1}{\alpha}} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où, bien entendu, $E\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}$.

Enfin, si α est un nombre entier, on peut mettre ce résultat en évidence par l'emploi de la formule

$$(9)\quad \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \int \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1})} d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{\alpha-1},$$

où $F_{\alpha-1}$ est une fonction finie.

On peut démontrer cette formule en partant de la remarque suivante :

Si

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + \ldots$$

désignent des séries entières, la valeur de la série

$$f_3(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

sera donnée par l'intégrale définie

$$(10)\qquad f_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x^\mu e^{i\theta}) f_2(x^{1-\mu} e^{-i\theta})\, d\theta,$$

μ désignant un exposant quelconque compris entre 0 et 1.

D'après cela, supposons la formule (9) démontrée pour une certaine valeur de α. Nous pourrons, dans l'égalité (10), faire $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$ avec $\mu = \frac{1}{\alpha+1}$. Cette égalité prendra bien alors la forme

$$\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha+1}} F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha)}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_\alpha,$$

pourvu que l'on pose

$$F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha) = e^{i\theta_\alpha} + e^{-\frac{i\theta_\alpha}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1}).$$

La formule (9) conduit d'ailleurs précisément à l'évaluation pre-

cédemment obtenue pour la série $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$, car l'intégrale qui figure au second membre est évidemment plus petite que $e^{M|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$, où M est le module maximum de $F_{\alpha-1}$.

9. Inversement, on peut chercher la loi de décroissance des coefficients, connaissant la loi de croissance de la fonction pour les grandes valeurs de x.

Dans son Mémoire précédemment cité, M. Poincaré résout cette question pour le cas particulier des fonctions que nous venons de considérer aux deux numéros précédents, en introduisant une fonction entière auxiliaire (¹),

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} F(tx)\, dt, \tag{11}$$

l'intégrale étant prise sur la partie positive de l'axe réel ou suivant un chemin équivalent.

On peut étendre cette méthode au cas le plus général où, par exemple (V étant une fonction quelconque positive et indéfiniment croissante avec la variable), la fonction F est supposée croître moins vite que $e^{V(x)}$. Il faudra de même considérer l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-V(t)} F(tx)\, dt, \tag{12}$$

(¹) Nous transformons, par un changement de variable, l'expression de M. Poincaré. Sous cette nouvelle forme, les fonctions (11) et (12) présentent une remarquable analogie avec les expressions que j'ai considérées dans un Mémoire précédent (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, nᵒˢ 35-37). En cet endroit, l'intégrale est prise entre les limites 0 et 1 : la fonction ainsi obtenue n'admet alors d'autres points singuliers que ceux de F, et il n'est besoin que d'hypothèses très simples sur la fonction désignée par $V(t)$. Dans le cas actuel, l'intégrale, étant prise entre 0 et ∞, est en général infinie; mais, toutes les fois qu'elle est finie, elle représente une fonction entière, ainsi qu'on le verrait par une discussion analogue à celle que j'ai présentée à l'endroit cité.

dans laquelle θ est une fonction de t telle que le rapport $\frac{\theta}{t}$ soit infini avec t, par exemple $t\,\mathrm{L}\,t$ ou $t^{1+\varepsilon}$.

Cette intégrale est finie, quel que soit x, et représente une fonction entière. Il en résulte immédiatement que les coefficients a_m de $\mathrm{F}(x)$ sont plus petits que les inverses des quantités successives

$$\int_0^\infty e^{-\mathrm{V}(\theta)}\, t^m\, dt. \tag{13}$$

Pour voir la loi de décroissance de a_m, il suffira donc d'étudier la manière dont varie la quantité (13) lorsque m augmente indéfiniment.

Mais on peut arriver au même résultat plus directement par la simple considération des intégrales définies qui fournissent les coefficients lorsqu'on donne les valeurs de la fonction

$$a_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z^{m+1}}.$$

Si, en effet, on prend pour le contour C une circonférence de rayon R, on voit que a_m est moindre que

$$\frac{e^{\mathrm{V}(\mathrm{R})}}{\mathrm{R}^m}. \tag{14}$$

10. Dans cette expression, le rayon R est entièrement arbitraire. Faisons $\mathrm{R} = \mathrm{U}(m)$, en désignant par U la fonction inverse de V; nous voyons que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\frac{e}{\mathrm{U}(m)}$.

Pour $\mathrm{V}(\mathrm{R}) = \mathrm{R}^{\frac{1}{\alpha}}$, ceci donne bien le résultat obtenu par M. Poincaré, et d'après lequel $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{e}{m^\alpha}$.

On voit encore, par ce procédé, que, dans le développement de e^{e^x}, on a

$$|a_m| < \left(\frac{e}{\mathrm{L}m}\right)^m;$$

et, en général, la série qui donne le développement de

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}$$

(le nombre des exponentielles superposées étant μ) a ses coefficients plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{(ex)^m}{(\mathrm{LL}\ldots\mathrm{L}m)^m}$$

(le nombre des signes L étant $\mu - 1$).

11. Mais cette manière d'opérer donne pour a_m une limite trop élevée. Pour obtenir une limite plus approchée, posons

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}) = \int \frac{\psi(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} d\mathrm{R}$$

et cherchons le minimum de l'expression (14). Il vient, en prenant la dérivée,

$$\psi(\mathrm{R}) = m,$$

ou bien (φ étant la fonction inverse de ψ)

$$\mathrm{R} = \varphi(m)$$

et, pour cette valeur de R, l'expression (14) devient

$$(15) \qquad \frac{e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}}{\varphi(m)^m}.$$

Supposons que la fonction $\psi(x)$ croisse plus vite que $x^{\frac{1}{\alpha}}$. La fonction $\varphi(m)$ croît moins vite que m^α, de sorte que l'on a

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}}\right| > e^{-\alpha}\varphi(m).$$

Il peut arriver que la fonction ψ augmente plus vite que n'importe

quelle puissance de x. Dans ce cas, on peut considérer α comme infiniment petit et écrire

$$\sqrt[m]{\left|\frac{1}{a_m}\right|} > (1-\varepsilon)\varphi(m).$$

Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° **6**. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne la véritable relation cherchée.

Si la fonction ψ croît plus lentement que toute puissance de la variable, et par suite φ plus vite que n'importe laquelle de ces puissances, les transformations précédentes de l'expression (15) ne sont plus applicables.

Si $\varphi(m)$ est à croissance moins rapide que celle de e^{m^k}, on aura

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)\,\mathrm{L}\varphi(m)} = \frac{d}{dm}[\mathrm{LL}\varphi(m)] < \frac{k}{m};$$

d'où résultera

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < k\,\mathrm{L}\varphi(m)$$

ou

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{k}{k+1}\,\frac{d}{dm}[m\,\mathrm{L}\varphi(m)],$$

et $|\sqrt[m]{a_m}|$ est moindre que $\dfrac{1}{\varphi(m)^{\frac{1}{k+1}}}$. C'est le cas de la fonction $\mathcal{F}(x)$ étudiée au n° 6.

Enfin, si la fonction φ est, pour les grandes valeurs de m, supérieure à toute fonction de la forme e^{m^k}, on peut affirmer en tout cas que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)}$.

En effet l'expression (15) peut s'écrire

$$e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm - m\,\mathrm{L}\varphi(m)} = e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm}$$

Or, f étant une fonction quelconque à dérivée croissante, on a

$$f(m) > \frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2}\right) + f\left(\frac{m}{2}\right),$$

car $f(m) - f\left(\frac{m}{2}\right)$ est de la forme $\frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2} + \frac{\theta m}{2}\right)$. En intégrant ([1]), il en résulte

$$\int f(m)\,dm > m f\left(\frac{m}{2}\right).$$

En posant $f(m) = \mathrm{L}\varphi(m)$, on obtient bien

$$e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm} < \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)^m}.$$

12. Nous allons maintenant nous occuper d'une certaine classe de fonctions qui jouent un grand rôle dans l'étude des fonctions entières : je veux parler des fonctions de la forme $e^{G(x)}$, où G est lui-même une fonction entière.

Le module d'une pareille fonction dépendant de la partie réelle de $G(x)$, nous présenterons tout d'abord quelques remarques sur la partie réelle d'une fonction entière.

Soit

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une fonction holomorphe dans un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon R; P la partie réelle de cette fonction au point $x = Re^{i\theta}$ de ce cercle. Le coefficient a_m sera donné par la formule

$$(16) \qquad a_m = \frac{1}{2\pi R^m} \int_0^{2\pi} P\, e^{-mi\theta}\, d\theta.$$

Faisons croître R indéfiniment et supposons que P reste *algébri-*

([1]) Nous négligeons la constante d'intégration, qui donne dans le résultat final un facteur constant.

quement (ainsi il faut remarquer qu'il n'est rien supposé sur les valeurs négatives de P) inférieur à R^λ, où λ est un certain exposant positif, soit

$$(17) \qquad P < R^\lambda.$$

Je dis que F est un polynôme de degré au plus égal à λ.

Partageons, en effet, la circonférence du cercle C en deux parties : l'une C_1, formée par l'ensemble des arcs où P est positif; l'autre C_2, comprenant tous les arcs où cette quantité est négative. Soient I_1 l'intégrale $\int P\,d\theta$ considérée le long de C_1 ; I_2 l'intégrale $\int - P\,d\theta$ prise le long de C_2.

Le rapport $\frac{I_1}{R^m}$ tendra vers zéro pour $m > \lambda$, d'après les hypothèses faites sur P; et il en sera de même pour $\frac{I_2}{R^m}$, car la différence $I_1 - I_2$ est une constante, à savoir la partie réelle de $2\pi a_0$.

Or la formule (16) montre que le module du coefficient a_m est inférieur à $\frac{I_1 + I_2}{R^m}$. Ce coefficient ne peut donc être que nul.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on voit que, si la partie réelle d'une fonction croît moins vite que le module de la variable, la fonction se réduit à une simple constante.

13. Nous avons supposé que l'inégalité (17) avait lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de la variable; mais nous remarquerons que cette hypothèse n'est point complètement nécessaire. Les raisonnements précédents sont valables dès que l'on peut trouver une suite infinie de circonférences C dont les rayons aillent en augmentant indéfiniment et sur lesquelles l'inégalité (17) soit vérifiée.

14. Revenons maintenant aux fonctions considérées au n° 7. Il sera préférable ici d'introduire, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ, de sorte que l'on aura, pour les grandes valeurs de x

$$(18) \qquad |F(x)| < e^{H|x|^\lambda}.$$

Supposons qu'une pareille fonction soit de la forme $e^{G(x)}$: la partie réelle de $G(x)$ devra rester algébriquement plus petite que $H|x|^\lambda$, et par suite la fonction $G(x)$ ne peut être qu'un polynôme. En particulier, si λ est plus petit que 1, la fonction G doit se réduire à une constante.

Ainsi, *lorsqu'une fonction* $F(x)$ *est de la forme* $e^{G(x)}$, *les coefficients de son développement ne peuvent pas décroître plus vite que* $\frac{1}{(m!)^\alpha}$, *à moins que* $G(x)$ *ne soit un polynôme.*

Il en serait de même si $F(x)$ était de la forme $\mathfrak{P}(x)e^{G(x)}$ (la lettre $\mathfrak{P}$ représentant un polynôme quelconque); car la multiplication ou la division par un polynôme n'altèrent pas le fait exprimé par l'inégalité (18).

15. Les résultats précédents présentent cette particularité de ne pas changer si l'on ajoute à la fonction $F(x)$ un polynôme quelconque; aussi peuvent-ils servir à démontrer, du moins pour les fonctions qui satisfont à la condition (8) (n° 7), le théorème connu de M. Picard [1] sur les fonctions entières.

Considérons d'abord une fonction entière F dont les coefficients vérifient la condition (8) avec $\alpha > 1$. Le nombre λ sera plus petit que 1 et il sera impossible que F soit de la forme $\mathfrak{P}e^{G(x)}$, du moins si G ne se réduit pas à une constante. L'équation $F = 0$ admettra donc une infinité de racines, et il en sera évidemment de même pour l'équation $F(x) = P(x)$, où P est un polynôme quelconque.

C'est par exemple le cas de la fonction $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité (7), (n° 6).

16. Supposons maintenant α quelconque, et soit E l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{\alpha}$. L'identité

$$(19) \qquad F(x) = P(x) + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)}$$

pourra avoir lieu, mais G devra être un polynôme de degré E au plus.

---

[1] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX; 1880.

Or, dans ces conditions, l'identité (19) ne peut avoir lieu de deux façons différentes, car c'est un fait bien connu que l'équation

$$(20) \qquad \mathrm{P}x + \mathfrak{P}(x)e^{\mathrm{G}(x)} + \mathrm{P}_1(x) + \mathfrak{P}_1(x)e^{\mathrm{G}_1(x)} + \ldots = 0,$$

où $\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathrm{G}, \mathrm{G}_1$ sont des polynômes, n'admet pas d'autre solution que ses solutions banales.

On peut même ajouter que si $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \ldots$ sont des fonctions entières dont les coefficients vérifient toujours la condition (8) et qui n'ont chacune qu'un nombre fini de zéros, la somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3 + \ldots$ aura nécessairement un nombre infini de racines, à moins que F_1, $\mathrm{F}_2, \ldots$ ne soient identiques à des facteurs constants et à des polynômes près. Cela résulte de la même proposition relative à l'équation (20).

17. La fonction F étant donnée, on peut résoudre l'équation (19) dès que l'on connaît le degré de $\mathrm{P}(x)$. Il suffira pour cela de différentier un nombre de fois supérieur à ce degré. Le second membre prendra la forme $\mathrm{Q}e^{\mathrm{G}}$ (où Q sera un nouveau polynôme), et, par conséquent, devra admettre un nombre fini de racines. Si l'on a obtenu ces racines, on connaîtra les polynômes Q et G, et la résolution d'équations linéaires fera connaître $\mathfrak{P}$.

En faisant, par exemple, P constant, on pourra, par ce procédé, reconnaître si l'équation

$$\mathrm{F} = a + \mathfrak{P}e^{\mathrm{G}}$$

est possible, et de la résoudre s'il y a lieu. On n'aura qu'une seule dérivée à prendre, et il viendra

$$\mathrm{Q} = \mathfrak{P}' + \mathrm{G}'\mathfrak{P}.$$

En égalant, dans cette identité, les coefficients de chaque puissance de x, on aura une série d'équations linéaires auxquelles devront satisfaire les coefficients de $\mathfrak{P}$.

Dans un grand nombre de cas, on pourra reconnaître immédiatement que l'équation (19) est impossible.

Faisons, par exemple,

$$F(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin\pi x.$$

D'après les propositions connues relatives à la fonction Γ, le polynôme G devrait être du premier degré, ce qui est contraire à ce fait que la fonction F croît comme $|x|\,\mathrm{L}|x|$. Donc les équations $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \mathfrak{P}(x)$, $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} + k\sin x = \mathfrak{P}(x)$, ... ont toujours une infinité de racines.

En général, pareil fait se produira toutes les fois que F augmentera plus vite que e^{kx^E} et moins vite que $e^{\frac{1}{k}x^{E+1}}$, quelque grand que soit k.

18. Les considérations précédentes démontrent le théorème de M. Picard pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (8). C'est, d'après le théorème de M. Poincaré, le cas de toutes les fonctions qui ont un genre fini.

On peut étendre une partie de ces conclusions à des fonctions de genre infini au moyen d'un raisonnement devenu classique dans cette théorie. On sait, en effet, que, si la fonction

$$F(x) = e^{G(x)},$$

qui n'a aucun zéro, était telle que l'équation $F(x) = 1$ n'admette non plus aucune solution, on en conclurait immédiatement que les mêmes propriétés appartiennent à la fonction

$$F_1(x) = \frac{1}{2i\pi}G(x).$$

Si, d'ailleurs, F croît moins vite que $e^{\psi(x)}$, on peut déduire de notre théorie que F_1 croîtra moins vite que $\psi(x)$.

Formons alors la suite des fonctions

$$f_1 = e^x, \qquad f_2 = e^{e^x}, \qquad f_3 = e^{e^{e^x}}, \qquad \ldots.$$

Si la fonction donnée F est dépassée par une fonction f_m de cette

suite, il suffira d'appliquer m fois le raisonnement précédent pour ramener F à vérifier la condition (8).

Mais, même à l'aide de l'extension précédente, la démonstration ne s'applique pas à une fonction quelconque; car on peut former une fonction entière croissant plus vite que n'importe quelle fonction f_m. On pourra, par exemple, procéder de la façon suivante :

Ayant pris une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ qui tendent vers zéro, on appellera m_1 le plus petit entier tel que la racine $m_1^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m dans $f_1(x)$ soit plus petite que ε_1, puis m_2 le plus petit entier tel que la racine $m_2^{\text{ième}}$ du coefficient de x^{m_2} dans $f_2(x)$ soit plus petite que ε_2, et ainsi de suite.

En écrivant les termes de f_1 jusqu'au rang $m_2 - 1$, puis les termes de f_2 depuis le rang m_2 jusqu'au rang $m_3 - 1$, puis les termes de f_3 depuis le terme de rang m_3 jusqu'au terme de rang $m_4 - 1, \ldots$, on obtiendra une fonction entière qui jouira manifestement des propriétés demandées.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHE DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES RACINES ET DU GENRE.

19. Les résultats obtenus dans notre première Partie permettent de compléter les conclusions de M. Poincaré, dans le cas des fonctions de genre zéro.

Soit, en effet,

$$F(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_p}\right)\cdots$$

une fonction de genre zéro, et $\varphi(p)$ une fonction positive et croissante telle que le module ρ_p de x_p soit supérieur à $\varphi(p)$. Nous supposerons de plus que $\varphi(p)$ soit supérieur à p^α (où α est un nombre plus grand que 1), et cela de telle manière que le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha-\varepsilon}}$ soit croissant, mais le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha+\varepsilon}}$ décroissant.

Le module de F ne peut dépasser la quantité

$$(21)\qquad F_0(R) = \left[1 + \frac{R}{\varphi(1)}\right]\left[1 + \frac{R}{\varphi(2)}\right]\cdots\left[1 + \frac{R}{\varphi(p)}\right]\cdots,$$

où R est le module de x.

Pour évaluer F_0, prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (21); nous trouvons

$$(22)\quad \frac{d}{dR}LF_0(R) = \frac{1}{\varphi(1)+R} + \frac{1}{\varphi(2)+R} + \ldots + \frac{1}{\varphi(p)+R} + \ldots.$$

Soit ψ la fonction inverse de φ et, dans le second membre, isolons les $p_0 = \psi(R)$ premiers termes. Leur somme sera moindre que $\frac{\psi(R)}{R}$. Quant à la somme des termes qui restent, elle est inférieure à

$$\frac{1}{\varphi(p_0)} + \frac{1}{\varphi(p_0+1)} + \ldots.$$

Cette dernière quantité s'évalue à l'aide des procédés employés dans la théorie élémentaire des séries. On la remplace tout d'abord par la somme

$$(23)\qquad \frac{(t-1)p_0}{\varphi(p_0)} + \frac{(t^2-t)p_0}{\varphi(tp_0)} + \frac{(t^3-t^2)p_0}{\varphi(t^2p_0)} + \ldots,$$

où t est un nombre quelconque plus grand que 1. D'ailleurs, les hypothèses relatives à la fonction φ donnent

$$\varphi(t^\mu p_0) > t_0^{\mu\alpha'}\varphi(p_0),$$

où $(\alpha' = \alpha - \varepsilon)$. La série (23) est donc moindre que

$$\frac{(t-1)p_0}{\varphi(p_0)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{t^{\mu(\alpha'-1)}} = \frac{p_0}{\varphi(p_0)}\,\frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1}-1}.$$

Le second facteur $\frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1}-1}$ a pour limite $\frac{1}{\alpha'-1}$ lorsque t tend

vers 1, de sorte que la série (23) peut être remplacée par

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{p_0}{\varphi(p_0)} = \frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R}.$$

Il vient donc ([1])

$$\frac{d}{dR}\mathrm{L}\,\mathrm{F}_0(R) < \frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R},$$

ou

$$(24) \qquad \mathrm{F}_0(R) < e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\int\frac{\psi(R)}{R}dR}$$

20. Ainsi le module de F ne peut croître plus vite que le second membre de l'inégalité précédente.

Si maintenant nous appliquons les conclusions du n° **11**, en supposant, pour fixer les idées, que α soit fini, nous voyons que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient a_m est moindre que $\dfrac{e^\alpha}{\varphi\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\varepsilon}m\right)}$, ce qui peut encore s'écrire $\dfrac{\left(\dfrac{e\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha+\varepsilon}}{\varphi(m)}$, puisque $\varphi(m)$ croît moins vite que $m^{\alpha+\varepsilon}$.

([1]) La limite ainsi obtenue est trop élevée. On peut, dans la plupart des cas, en obtenir une plus approchée en formant un second groupe avec les termes de la série (22) dont le rang est compris entre $\psi(R)$ et $2^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(R)$, lesquels sont tous plus petits que $\frac{1}{2R}$; puis un troisième groupe allant du rang $2^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(R)$ au rang $3^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(R)$, les termes étant alors plus petits que $\frac{1}{3R}$. Après séparation d'un certain nombre de ces groupes, on calcule le reste de la série comme il a été expliqué. On trouve ainsi pour la série (22) $\left[\text{en laissant de côté le facteur } \frac{\psi(R)}{R}\right]$ les limites $\dfrac{1+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}2^\alpha}{2}+\varepsilon$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{6}+\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}3^{\frac{1}{\alpha}}}{3}+\varepsilon$, ...

Pour $\alpha=2$, le coefficient de $\frac{\psi(R)}{R}$ serait (au terme ε près)

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+2\frac{\sqrt{3}}{3}=1,88\ldots$$

au lieu de 2.

21. Nous allons maintenant nous occuper de la question inverse et chercher comment on peut obtenir la loi de distribution des racines quand on connaît la loi des coefficients.

Cette recherche repose sur les formules que j'ai données dans un précédent travail ([1]), et qui permettent de calculer les zéros successifs d'une fonction à l'aide des coefficients de son développement. Je vais tout d'abord résumer succinctement la marche suivie pour arriver à ces formules, en renvoyant pour les détails au Mémoire dont je viens de parler.

On commence par introduire une définition, celle de la *limite supérieure* d'une suite telle que

$$(25) \qquad u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

pour m infini (les u étant des nombres réels).

C'est la plus petite quantité qui ne soit pas dépassée, ou du moins soit infiniment peu dépassée par les termes de la suite (25) à indices infiniment grands; ou encore, cette limite supérieure l est le plus grand nombre jouissant de cette propriété que dans la suite (25) on puisse trouver une série indéfinie de termes tendant vers l.

Dans un grand nombre de cas, l est la seule quantité satisfaisant à cette dernière condition. Alors l est, pour la suite (25), une limite, au sens ordinaire du mot. Nous exprimerons souvent ce fait en disant que les termes de la suite (25) *tendent régulièrement* vers l.

La notion de limite supérieure fournit d'abord une expression du rayon de convergence d'une série entière quelconque

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

Il suffit, en effet, de former la suite

$$|a_1|, \quad |\sqrt[2]{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots.$$

([1]) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1re et 2e Parties (ce Journal, 4e série, t. VIII; 1892).

Soit l la limite supérieure (supposée finie) de cette suite. Le rayon cherché est donné par la formule $\rho = \frac{1}{l}$.

22. Proposons-nous maintenant d'exprimer que les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ sont des pôles au nombre de P (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

S'il en est ainsi, on pourra débarrasser la fonction de ces pôles en la multipliant par un polynôme de degré P

$$\mathfrak{P}_P = 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(P)}x^P$$

et la nouvelle série ainsi obtenue

$$F_1 = \Sigma\, b_m x^m$$

sera convergente dans un cercle de rayon $\rho' > \rho$, de sorte qu'on pourra écrire

$$(26) \qquad b_{m+P} = a_{m+P} + A^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A^{(P)} a_m = \left[\frac{\theta(1+\varepsilon)}{\rho'}\right]^m$$

où θ est de module inférieur à 1 et ε un infiniment petit.

Réciproquement, s'il existe des nombres $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$ jouissant de la propriété précédente, la fonction donnée ne pourra posséder sur le cercle primitif d'autres points singuliers que des pôles, dont les affixes seront racines de l'équation

$$(27) \qquad 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(P)}x^P = 0.$$

Elle admettra bien tous ces pôles s'il est impossible de trouver un polynôme de degré moindre que P et remplissant les mêmes conditions.

23. Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$

$$(28) \qquad D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

p étant un entier quelconque. Nous désignerons par l_p la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ pour un infini (p restant fixe).

Tout d'abord, quels que soient les points singuliers de notre fonction sur son cercle de convergence, l_p ne peut dépasser $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p+1}$, d'après ce qui a été supposé sur l'ordre de grandeur de a_m.

Mais, si le polynôme $\mathfrak{P}_P$ existe, nous trouverons pour l_P une valeur nécessairement moindre que la limite précédente. Car on pourra, dans la dernière colonne du déterminant (28), remplacer les a par les b de même indice, lesquels sont inférieurs à $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m$. Il viendra donc

$$l_P \leqq \frac{1}{\rho^P \rho'}.$$

24. Inversement, supposons que l'inégalité

$$(29) \qquad l_p < \frac{1}{\rho^{p+1}}$$

soit vérifiée pour $p = P$, mais non pour aucune valeur moindre de p.

En particulier, la quantité $\sqrt[m]{|D_{m,P-1}|}$ a pour limite supérieure $\rho^{\frac{1}{P}}$.

On démontre tout d'abord qu'elle tend régulièrement vers cette limite; puis on détermine les coefficients $A_m^{(1)}, \ldots, A_m^{(P)}$ par les équations

$$\begin{aligned}
&a_{m+P} + A_m^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A_m^{(P)} a_m = 0,\\
&a_{m+P+1} + A_m^{(1)} a_{m+P} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{m+2P-1} + A_m^{(1)} a_{m+2P-2} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+P-1} = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on fait augmenter m indéfiniment, on constate que $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots, A_m^{(P)}$ tendent respectivement vers des limites $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$, lesquelles vérifient les équations (26) en prenant pour ρ' la valeur fournie par l'équation $l_P = \frac{1}{\rho^P \rho'}$.

La fonction, considérée sur le cercle de rayon ρ, admet donc au plus P pôles, les racines de l'équation (27). Elle les admet d'ailleurs tous, sans quoi l'inégalité (29) serait vérifiée pour $p < P$.

Soient $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_p$, ... les différents pôles de notre fonction, rangés par ordre de module croissant (les pôles de module égal étant rangés dans un ordre arbitraire); ρ_1, ρ_2, ..., ρ_p, ... leurs modules. Les P premiers de ces modules seront tous égaux à ρ, de sorte que l'on aura, pour toutes les valeurs de p inférieurs à P, l'équation

$$(30) \qquad \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p} = l_{p-1}.$$

25. Considérons maintenant les valeurs de p supérieures à P. Pour une quelconque de ces valeurs, l_p sera au plus égal à $\frac{1}{\rho^{P} \rho'^{p-P+1}}$, et cela quels que soient les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ', ainsi qu'on le voit en transformant à l'aide des équations (26) les $p - P + 1$ dernières colonnes du déterminant (28).

Mais si ces points singuliers sont des pôles au nombre de P′, une nouvelle réduction se produira pour $p = P + P'$; car il existera un polynôme de degré $P + P'$,

$$\mathfrak{P}'_{P+P'} = 1 + B^{(1)} x + \ldots + B^{(P+P')} x^{P+P'},$$

tel que la série $F_2 = \mathfrak{P}' F = \Sigma c_m x^m$ ait un rayon de convergence ρ'' supérieur à ρ'. Comme dans le déterminant $D_{m,P+P'}$ on peut remplacer les éléments de la dernière colonne par les c de même indice, on voit que $l_{P+P'}$ ne peut être supérieur à $\frac{1}{\rho^{P} \rho'^{P'} \rho''}$.

Inversement, considérant la suite des valeurs de p à partir de $p = P$, on en rencontrera d'abord un certain nombre (qui peuvent d'ailleurs se réduire à une seule, $p = P$) pour lesquelles l_p est égal à $\frac{1}{\rho^{P} \rho'^{p-P+1}}$.

Si après cette série de valeurs en survient une, $p = P + P'$, pour laquelle l_p soit égal à $\frac{1}{\rho^{P} \rho'^{P'} \rho''}$, où ρ'' est supérieur à ρ', cette circonstance dénotera, comme on le démontre à l'aide de raisonnements analogues aux précédents, la présence de P′ pôles sur le cercle de rayon ρ'.

Les modules $\rho_{P+1}, \ldots, \rho_{P+P'}$ sont donc tous égaux à ρ', et, par suite, on aura pour les valeurs de p comprises entre P et P + P′ inclusivement

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_p} = \frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P}},$$

c'est-à-dire l'équation (30), d'après ce que nous savons sur les nombres $l_P, \ldots, l_{P+P'}$.

Ayant ainsi étudié les valeurs de l_p jusqu'à $p = P + P'$, on considérera les valeurs suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

On constate tout d'abord par ce procédé que le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ ne va jamais en diminuant. La condition nécessaire et suffisante pour que notre fonction soit méromorphe dans tout le plan est que ce rapport augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, les raisonnements précédents, appliqués aux valeurs de p pour lesquelles le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ présente une croissance, permettent de calculer les affixes des différents pôles. Mais nous n'avons besoin, pour ce qui va suivre, que des modules de ces pôles.

A ce point de vue nos conclusions peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

L'équation (30) *est générale.*

26. Ayant appris à calculer les pôles d'une fonction $F(x)$ donnée par un développement taylorien quelconque, nous sommes à même de résoudre le même problème pour les zéros d'une telle fonction, car ces zéros ne sont autres que les pôles de la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

Le calcul des coefficients d'une fonction à l'aide des coefficients de son inverse n'offre aucune difficulté.

Soit, comme précédemment, la fonction

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

dans laquelle seulement a_0 est supposé différent de zéro. On multipliera

cette série par la série

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots,$$

et, en égalant à zéro les coefficients de la série produit, à partir du second, on déterminera C_0, C_1, ..., etc. Des valeurs ainsi trouvées on déduit aisément l'expression du déterminant $D_{m,p}$ formé, comme nous l'avons expliqué, à l'aide des coefficients de la série $f(x)$. On trouve ainsi pour ce determinant la valeur

$$(-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}},$$

où l'on a posé

$$(31) \qquad E_{m,p} = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & a_0 & 0 & . & \ldots & 0 \\ a_{p+2} & a_{p+1} & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & \\ a_{m+2p} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_{p+1} \end{vmatrix}$$

et l'équation (30) devient, en y changeant p en $p+1$,

$$(32) \qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}} = l_p = \lim_{m=\infty}\text{sup.}\sqrt[m]{\left|\frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}}\right|} = \frac{1}{|a_0|}\lim_{m=\infty}\text{sup.}\sqrt[m]{|E_{m,p}|},$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ désignant cette fois les modules des zéros de $F(x)$.

Telle est la formule dont nous avions besoin de rappeler la démonstration et qui va nous servir de point de départ.

27. Supposons que $F(x)$ soit une fonction entière et que le coefficient a_m soit moindre que $\frac{1}{\chi(m)} = \frac{1}{\varphi(m)^m}$, où $\varphi(m)$ est une fonction positive indéfiniment croissante de m. Nous admettrons en outre que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ est constamment croissant, hypothèse toujours légitime, d'après ce qui a été expliqué aux n^{os} **3-5**.

Nous aurons un maximum du déterminant $E_{m,p}$, défini par la for-

mule (31), en y considérant tous les termes comme positifs et remplaçant chaque coefficient a_m par la valeur correspondante de $\frac{1}{\chi(m)}$, autrement dit en imaginant que dans le déterminant

$$(33)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\chi(p+1)} & \frac{1}{\chi(p)} & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\chi(p+2)} & \frac{1}{\chi(p+1)} & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{\chi(m+p-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} \\ \frac{1}{\chi(m+p)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+2p)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(p+1)} \end{vmatrix}$$

on convienne de prendre tous les termes avec le signe $+$.

Dans le déterminant (33), l'élément $a_{i,k}$ correspondant à la colonne de rang i et à la ligne de rang k est égal à zéro si $i-k > p+1$ et à $\frac{1}{\chi(p+1+k-i)}$ dans le cas contraire. Le nombre des termes est

$$(p+2)^{m-1}(p+1)!$$

Je dis que le plus grand terme est celui qui correspond à la diagonale principale.

Effectivement tout autre terme que celui-là présente au moins une *inversion*, suivant la locution usitée dans la théorie élémentaire des déterminants. Il contient donc en facteurs deux éléments $a_{i,k'} \cdot a_{i',k}$ tels que $i < i'$, $k < k'$. Si à ce produit on substitue le produit $a_{i,k} \cdot a_{i',k'}$, on obtient un autre terme du déterminant, et ce nouveau terme est plus grand que le précédent. Ceci résulte de ce que le rapport $\frac{a_{i+1,k}}{a_{i,k}} = \frac{\chi(p+1+k-i)}{\chi(p+1+k-i-1)}$ est croissant avec k, d'après les hypothèses faites sur la fonction χ. Il en est de même des rapports

$\frac{a_{i+2,k}}{a_{i+1,k}}, \ldots, \frac{a_{i',k}}{a_{i'-1,k}}$ et par suite de leur produit $\frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$. On a donc bien

$$\frac{a_{i',k'}}{a_{i,k'}} > \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}.$$

Le plus grand terme est donc celui qui ne renferme pas d'inversion, c'est-à-dire le terme principal.

Il en résulte

$$|E_{m,p}| \leqq (p+1)!\,(p+2)^{m-1}\left[\frac{1}{\chi(p+1)}\right]^{m+p-1}$$

et

$$l_p \leqq \frac{p+2}{|a_0|\cdot\chi(p+1)}.$$

Mais le produit $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}$ est égal à $\frac{1}{l_p}$. Le plus grand facteur de ce produit, à savoir le dernier, est donc au moins égal à $\sqrt[p+1]{\frac{1}{l_p}}$, c'est-à-dire, à un facteur près qui tend vers l'unité pour p infini, au moins égal à $\varphi(p+1)$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus si la fonction s'annulait à l'origine. Mais on ramènerait ce cas au cas général en divisant par une puissance convenable de x et en raisonnant sur la fonction ainsi débarrassée de ses racines nulles.

Nous avons également supposé que l'inégalité

$$(34) \qquad |a_m| < \frac{1}{\chi(m)}$$

était vérifiée, quel que soit m. Mais il suffit manifestement qu'elle ait lieu pour les grandes valeurs de l'indice; car on ramènerait les premiers coefficients à vérifier la même inégalité en divisant toute la série par un certain nombre constant, ce qui ne changerait pas les racines.

La condition que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit croissant peut également n'être vérifiée que pour les grandes valeurs de m; car on pourra remplacer, s'il y a lieu, les valeurs de $\chi(m)$ jusqu'à un certain rang par d'autres qui satisfassent à cette condition.

Nous arrivons donc à cette conclusion :

Théorème. — *Si le coefficient a_m décroît plus vite que $\frac{1}{\varphi(m)^m}$, la $p^{\text{ième}}$ racine a un module supérieur à* $(1-\varepsilon)\varphi(p)$, où ε est infiniment petit pour p infini.

En un mot, *les modules des racines vont en croissant plus vite que* $\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}$.

Par exemple, les racines de la fonction

$$\mathfrak{F}(x) = \Sigma q^{n^2} x^n,$$

considérée au n° **6**, croissent au moins aussi vite que q^n. Il en est de même pour les racines de l'équation $\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{R}(x)$, où $\mathfrak{R}$ est une fonction rationnelle quelconque.

28. Venons maintenant à notre objet principal et proposons-nous d'étudier le genre d'une fonction donnée par son développement en série entière.

Pour cela, nous appliquerons le résultat que nous venons d'obtenir aux fonctions, étudiées au n° **7**, pour lesquelles on a

$$\chi(m) = (m!)^\alpha,$$

et, par suite,

$$\varphi(m) = m^\alpha.$$

Comme précédemment, nous introduirons, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ.

Nous savons donc que le module ρ_p de la $p^{\text{ième}}$ racine croît, lorsque p augmente indéfiniment, plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Si λ n'est pas entier, et que $E+1$ soit l'entier immédiatement supérieur, la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ est convergente. Nous en conclurons plus loin que la fonction est du genre E.

Lorsque λ est un entier, il y a doute. C'est à cette hypothèse que se rattache l'exemple dont parle M. Poincaré dans son Mémoire [1] et relatif à la fonction

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right).$$

Il faudrait, dans les cas de cette espèce, étudier directement la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{\varphi(p)^\lambda}$.

Quoi qu'il en soit, nous supposons que, le coefficient a_m étant moindre que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, nous désignerons par $E+1$ l'entier immédiatement supérieur (et non égal) à λ, de sorte que la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ soit certainement convergente. Nous pourrons former, d'après la méthode de M. Weierstrass, la fonction

$$(35)\qquad \Phi(x)=\prod\left(1-\frac{x}{x_p}\right)e^{Q_E\left(\frac{x}{x_p}\right)},$$

---

[1] M. Poincaré démontre, non seulement que a_m est plus petit que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, mais que le produit $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro. On peut même déduire de sa démonstration que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce produit tend vers zéro; car $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ se présente comme $m^{\text{ième}}$ coefficient d'une série entière.

Inversement, si la série $m^{\text{ième}}$ de $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro, nous savons que ρ_p est égal au produit de $p^{\frac{1}{\lambda}}$ par une quantité qui augmente indéfiniment. La série $\sum \frac{1}{\rho_p^\lambda}$ est donc telle que ses termes soient avec ceux de la série harmonique dans un rapport infiniment petit pour p infini. Mais une telle série n'est pas nécessairement convergente, et le contraire se produit précisément dans l'exemple donné par M. Poincaré.

où $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ sont les racines successives et $Q_E(z)$ est le polynôme

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^E}{E},$$

obtenu en prenant dans le développement de $-L(1-z)$ les E premiers termes.

La fonction donnée $F(x)$ sera égale au produit de $\Phi(x)$ par un facteur de la forme $e^{G(x)}$. Puisque nous avons déjà démontré que les polynômes de la formule (1) sont de degré E, tout se réduit à établir que $G(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à E.

29. Or je vais faire voir qu'*on peut décrire, avec l'origine comme centre, des cercles aussi grands qu'on le veut sur lesquels la fonction* $\Phi(x)$ *reste constamment supérieure à* $e^{-|x|^{\lambda+\epsilon}}$.

Les rayons de ces cercles seront déterminés ainsi qu'il suit :

Les modules ρ_p, d'après nos hypothèses, croissent plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Admettons en outre que la quantité $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, ce qui peut évidemment se faire en donnant, s'il y a lieu, un petit accroissement à λ.

Puisque $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, il existera une infinité d'entiers p pour chacun desquels cette quantité prendra une valeur plus petite que toutes les valeurs suivantes. Soit p_0 un tel entier, de sorte qu'on ait pour $h > 0$

$$(36) \qquad \rho_{p_0+h}^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda > h.$$

Nous déterminerons R par la relation

$$(37) \qquad R^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda = \tfrac{1}{2},$$

de sorte que l'inégalité (36) pourra s'écrire

$$(38) \qquad \rho_{p_0+h} > \left(h - \tfrac{1}{2} + R^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Pour chaque valeur de l'entier p_0, nous aurons ainsi une valeur de R; nous obtenons donc bien une suite de cercles dont les rayons vont en augmentant indéfiniment. Je dis que ces cercles satisfont à la condition indiquée.

30. Pour plus de clarté, je considérerai d'abord le cas où λ est plus petit que 1 (l'égalité étant exclue), de façon qu'on a $E = 0$. Les facteurs exponentiels disparaissant, la formule (35) se réduit à

$$(35') \qquad \Phi(x) = \prod \left(1 - \frac{x}{x_p}\right),$$

et, lorsque le point x décrira le cercle de rayon R, le module de $\Phi(x)$ restera supérieur à la quantité

$$(39) \qquad \prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right) \prod_{p=p_0+1}^{\infty} \left(1 - \frac{R}{\rho_p}\right).$$

Nous évaluerons cette expression en partageant les facteurs qui la composent en trois groupes. Le premier Π_1 comprendra tout ce qui figure sous le premier signe Π,

$$(40) \qquad \Pi_1 = \prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right).$$

Le nombre p_0 de ces facteurs est, nous le savons, moindre que $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est le dernier, égal à

$$\frac{R}{(R^\lambda - \frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1,$$

par conséquent supérieur à $\frac{1}{2R^\lambda}$, puisque λ est plus petit que 1.

Si nous envisageons les autres facteurs du produit (39), la formule

(38) nous montre que l'on a

$$(41) \qquad 1 - \frac{R}{\rho_{p_0+h}} > 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Nous composerons le produit Π_2 avec tous les facteurs pour lesquels $h - \frac{1}{2}$ est plus petit que R^λ. Le nombre de ces facteurs est moindre que $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Le plus petit est le premier, au moins égal à $1 - \frac{R}{(R^\lambda + \frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}}$, par conséquent supérieur à $\frac{k}{2R^\lambda}$ (k restant fini pour R infini).

Les facteurs restants, qui forment le produit Π_3, peuvent se mettre sous la forme $1 - u$, où $u = \frac{1}{\left(1 + \frac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Or, sous cette condition, on voit aisément que $1 - u$ est supérieur à e^{-2u}. Chacun des facteurs du produit Π_3 est donc plus grand que la valeur correspondante de $e^{-\frac{2}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}}$, ou, plus simplement, de $e^{-\frac{2R}{h^{\frac{1}{\lambda}}}}$.

D'après ces remarques, on voit que le produit Π_1 est supérieur à $\left(\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{R^\lambda}$, ou (comme $2R^\lambda$ croît moins vite que e^{R^ε}, si petit que soit ε) supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Une évaluation semblable s'applique au produit Π_2.

Quant au produit Π_3, il est plus grand que $e^{-R\sigma}$, où σ est le reste de la série $\sum \frac{1}{h^{\frac{1}{\lambda}}}$ arrêtée au terme qui a pour rang l'entier h_0 immédiatement supérieur à $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Or le reste d'une pareille série est de l'ordre de $h_0^{1-\frac{1}{\lambda}}$ ou de $R^{\lambda-1}$, de sorte que Π_3 est aussi moindre que $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Nous trouvons donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

31. Pour généraliser cette proposition au cas d'un genre quelconque, nous remarquerons que, pour $u < 1$, la quantité $(1-u)e^{Q_E(u)}$ est supérieure à $1 - u^{E+1}$. C'est ce qui résulte des deux développements

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} & L(1-u) + Q_E(u) \\ & \quad = -\frac{u^{E+1}}{E+1} - \frac{u^{E+2}}{E+2} - \cdots - \frac{u^{2(E+1)}}{2(E+1)} - \cdots - \frac{u^{3(E+1)}}{3(E+1)} - \cdots, \end{aligned} \right.$$

$$(43)\qquad L(1-u^{E+1}) = -u^{E+1} - \frac{u^{2(E+1)}}{2} - \frac{u^{3(E+1)}}{3} - \cdots.$$

Les termes de la série (42) sont constamment décroissants en valeur absolue. Le premier terme de la série (43) sera donc (en valeur absolue) supérieur à l'ensemble des $E+1$ premiers termes de la série (42); le deuxième terme de (43) à la somme des $E+1$ suivants, etc.

D'après cela, au lieu des facteurs $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ qui composaient tout à l'heure les produit Π_2 et Π_3, nous aurons à considérer des facteurs de la forme $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{E+1}{\lambda}}}$.

Pour les valeurs de h inférieures à $R^\lambda + \frac{1}{2}$, nous remplacerons $\frac{E+1}{\lambda}$ par l'unité, et nous trouverons pour le produit Π_2 de ces facteurs la même évaluation que précédemment.

Quant aux facteurs suivants, nous constaterons comme plus haut que leur produit est supérieur à $e^{-R^{E+1}\sigma'}$, où σ' est le reste de la série $\dfrac{1}{h^{\frac{E+1}{\lambda}}}$, arrêtée au terme de rang h_0.

Ce reste étant comparable à $\dfrac{1}{h_0^{\frac{E+1}{\lambda}-1}}$, le produit Π_3 est encore supérieur à $e^{-R^{\lambda+\epsilon}}$.

Au produit Π_1 correspondra un produit de facteurs polynômes et de facteurs exponentiels. Les premiers sont en nombre au plus égal

à $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est supérieur à $\dfrac{}{\left(1 - \dfrac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1$, quantité de la forme $\dfrac{k}{R^\lambda}$, où k est fini. Leur produit satisfait donc encore aux conclusions précédentes.

Les facteurs exponentiels sont respectivement plus grands que les quantités $e^{-\left(\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^E}{E}\right)}$, où $u = \dfrac{R}{\rho_p}$ est plus grand que 1. Nous diminuerons encore une telle quantité en supprimant les dénominateurs du polynôme Q_E. Le plus grand terme de ce polynôme devient alors le dernier et nous pourrons remplacer tous les autres par celui-là. Nous trouvons donc un produit plus grand que l'expression

$$(44) \qquad e^{-ER^E \sum\limits_{p=1}^{p_0} \frac{1}{\rho_p^E}}.$$

ρ_p étant de l'ordre de $p^{\frac{1}{\lambda}}$, la série $\dfrac{1}{\rho_p^E}$ est divergente; mais sa somme, lorsqu'on la limite au terme de rang p_0, n'augmente pas plus vite que $p^{1-\frac{E}{\lambda}}$.

En prenant $p_0 = R^\lambda$ et substituant dans l'expression (44), on arrive pour cette dernière au même résultat que pour les précédentes.

32. Notre proposition auxiliaire est donc démontrée. Sur chacun des cercles de rayon R, l'inégalité

$$|\Phi(x)| > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$$

est vérifiée.

Comme on a, d'autre part, ainsi qu'il a été vu au n° **7**,

$$|F(x)| < e^{HR^\lambda},$$

il vient

$$\left|\frac{F}{\Phi}\right| = |e^{G(x)}| < e^{R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction $e^{G(x)}$ les considérations développées aux nos **12-13**, et nous en concluons que $G(x)$ est un polynôme de degré E au plus, de sorte que notre fonction F est bien du genre E.

33. Ainsi, nous avons établi que, *lorsque le coefficient a_m est de l'ordre de $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, où λ n'est pas entier, la fonction $\Sigma a_m x^m$ est du genre* E, *en désignant par* $E+1$ *l'entier immédiatement supérieur à* λ. La réciproque du théorème de M. Poincaré est donc bien établie pour λ non entier.

Si λ est un entier $E+1$, il y a doute. Notre fonction peut être du genre E ou du genre $E+1$.

A cause de ce cas douteux, les recherches précédentes ne permettent pas encore de résoudre complètement la question posée par M. Poincaré dans son Mémoire, et de décider si le genre se conserve dans la différentiation ou dans une combinaison linéaire. Nous pouvons seulement affirmer que la dérivée d'une fonction de genre E ou la somme de deux pareilles fonctions est *en général* de genre E et *au plus* de genre $E+1$.

Le cas où les résultats précédents affectent la forme la plus simple est celui où, λ étant plus petit que 1, le genre est égal à zéro.

C'est ce qui arrivera, par exemple, pour $\frac{\sin x}{x}$ si l'on considère cette quantité comme fonction de x^2. Nous complétons ainsi, comme on le voit, la démonstration de la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

On sait en effet que, dans les cours de Calcul intégral (1), on n'arrive pas à déduire immédiatement cette formule du théorème de M. Weierstrass. Une démonstration spéciale est nécessaire pour établir que le facteur exponentiel disparaît.

(1) *Voir*, par exemple, Picard, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 151.

Ici, cette circonstance apparaît tout d'abord, en supposant seulement connu le développement taylorien de $\sin x$, ou, plus simplement encore, en partant de sa relation avec la fonction exponentielle.

La fonction $\mathcal{F}(x)$ du n° 6 est également du genre zéro, ainsi que ses combinaisons linéaires avec d'autres fonctions analogues ou des polynômes, etc.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION A LA FONCTION DE RIEMANN.

34. Dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (¹), Riemann utilise les propriétés de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

dont l'étude est elle-même ramenée à celle d'une fonction entière $\xi(x)$ donnée par la formule

$$(45) \qquad \xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \Psi(t) t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2}\log t\right) dt,$$

où

$$(46) \qquad \Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}.$$

L'analyse de Riemann repose sur ce fait que $\xi(x)$, considéré comme fonction de x^2, est de genre zéro, fait qui est énoncé dans son Mémoire, mais sans démonstration suffisante.

Les recherches précédentes vont nous permettre de déterminer en toute rigueur le genre de $\xi(x)$.

(¹) Riemann, *Œuvres complètes* (Ed. Weber et Dedekind), p. 136 et suiv.

35. Nous aurons tout d'abord à développer ξ en série. L'intégrale qui figure au second membre de la formule (45) est de la forme $\Sigma(-1)^m C_{2m} x^{2m}$, où l'on a

$$C_m = \frac{1}{2^m m!}\int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} (\log t)^m\, dt. \tag{47}$$

On aura donc, en considérant ξ comme fonction de x^2,

$$\xi(x) = \sum_0^\infty a_m x^{2m}, \tag{48}$$

où les coefficients a sont donnés, à l'exception du premier, par la formule

$$a_m = (-1)^m \left(\frac{C_{2m}}{4} - C_{2m-2}\right). \tag{49}$$

36. Remarquons tout d'abord que la série $\Psi(t)$ peut être remplacée, à un facteur fini [1] près, par son premier terme $e^{-\pi t}$. On peut également faire abstraction du facteur $t^{-\frac{3}{4}}$ qui est plus petit que 1.

D'ailleurs, si ε est un nombre positif, mais aussi petit qu'on le voudra, l'inégalité

$$(\log t)^m < e^{\varepsilon t}$$

ou

$$\log t < e^{\frac{\varepsilon t}{m}} \tag{50}$$

est vérifiée à partir de la valeur $t = m^{1+\varepsilon}$, du moins pour les grandes valeurs de m ; car on a bien, pour m suffisamment grand,

$$(1+\varepsilon)\log m < e^{\varepsilon m^\varepsilon}$$

---

(1) Ce facteur est même très voisin de 1. Il est inférieur à

$$1 + \frac{e^{-3\pi}}{1 - e^{-5\pi}} < 1 + \frac{1}{10000}.$$

et de plus, en prenant les dérivées des deux membres de l'inégalité (50), on trouve

$$\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{m} e^{\frac{\varepsilon t}{m}},$$

inégalité dont le premier membre est décroissant tandis que le second est croissant et qui est vérifiée pour $t = m^{1+\varepsilon}$, si m est suffisamment grand.

Si donc, dans la formule (47), nous décomposons l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{2^m m!}$ en deux, l'une prise entre les limites 1 et $m^{1+\varepsilon}$, l'autre entre $m^{1+\varepsilon}$ et $+\infty$, la seconde sera moindre que $\frac{e^{-(\pi-\varepsilon)m^{1+\varepsilon}}}{\pi-\varepsilon}$, c'est-à-dire infiniment petite pour m infini.

La première sera manifestement inférieure à

$$C_0(1+\varepsilon)^m(\log m)^m,$$

où C_0 est l'intégrale $\int_1^\infty e^{-\pi t} t^{-\frac{3}{4}}\, dt$.

C_m sera donc au plus de l'ordre de $\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^m \frac{(\log m)^m}{m!}$, ce qui donne

$$|a_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2m} \frac{(\log 2m)^{2m}}{(2m)!}.$$

Il faut donc prendre ([1])

$$\varphi(m) = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\,\frac{2m}{e\log m}\right)^2.$$

D'après ce qui précède, cette formule exprime également la loi de croissance des racines de l'équation $\xi(x) = 0$, considérée comme équation en x^2.

Si l'on considère x comme l'inconnue de l'équation, il faut prendre

---

([1]) La fonction $\varphi(m)$ ainsi définie satisfait manifestement aux conditions indiquées au n° 27.

la racine carrée de l'expression précédente et l'on trouve

$$\rho_p > \frac{kp}{\log p}, \tag{51}$$

en posant

$$k = \frac{4-\varepsilon}{e}. \tag{52}$$

37. Si nous voulions avoir une limite supérieure des modules des racines successives, il faudrait commencer par trouver une limite inférieure du module de a_m. Or on aura une limite inférieure de C_m en prenant l'intégrale entre les limites $m^{1-\varepsilon}$ et $m^{1-\varepsilon'}$ (où ε et $\varepsilon' < \varepsilon$ sont deux nombres positifs très petits. On trouve ainsi

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m e^{-\pi m^{1-\varepsilon'}} m^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)}}{2^m m!}(m^{1-\varepsilon'} - m^{1-\varepsilon}),$$

ce qui peut s'écrire

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m}{2^m m!},$$

en réunissant tous les facteurs de la forme $(1-\varepsilon)^m$.

D'ailleurs le rapport $\frac{C_m}{C_{m-2}}$ tend vers zéro; car dans l'évaluation de ce rapport on peut, d'après ce que nous avons vu, considérer l'intégrale prise seulement jusqu'à la limite $t = m^{1+\varepsilon}$, et il vient alors

$$C_m < C_{m-2}\frac{(1+\varepsilon)^2 \log^2 m}{4m(m-1)}.$$

Il en résulte que $|a_m|$ est, à un facteur constant près, supérieur à C_{2m-2} ou à $\frac{(1-\varepsilon)^{2m}(\log m)^{2m}}{2^{2m}(2m)!}$.

Nous pourrons alors appliquer les raisonnements des n^{os} **19-20** en prenant $\varphi(p) = \left(\frac{k'p}{\log p}\right)^2$, où k' est une constante indéterminée. On a

ici $\alpha = 2 - \varepsilon$, et l'on trouve

$$|a_m| < \left[\frac{(2e+\varepsilon)\log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

En appliquant la réduction indiquée dans la note 1 (p. 21), on obtient une limite un peu moins élevée

$$|a_m| < \left[\frac{(1,88+\varepsilon)\, e \log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle qui vient d'être trouvée pour a_m, il vient

$$k' = 7,56\ldots$$

Telle est la quantité que $\frac{\rho_p \log p}{p}$ ne saurait dépasser constamment, lorsque p grandit indéfiniment.

Les conclusions auxquelles nous arrivons sont donc les suivantes :

Le rapport $\frac{1}{\rho_p}\frac{p}{\log p}$ *reste fini et sa limite supérieure, pour* p *infini, est comprise entre* $\frac{1}{7,56}$ *et* $\frac{e}{4}$.

Riemann donne, entre un module ρ et le nombre p des racines de module plus petit que ρ, la relation approchée

$$(53) \qquad p = \frac{\rho}{2\pi}\left(\log\frac{\rho}{2\pi} - 1\right).$$

Pour comparer ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, il faut résoudre cette équation par rapport à ρ, ce qui se fait aisément par la méthode des approximations successives. On trouve ainsi comme valeur approchée

$$\rho = \frac{2\pi p}{\log p},$$

de sorte que le rapport $\frac{1}{\rho}\frac{p}{\log p}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2\pi}$. Cette valeur

est comprise entre les deux limites précédemment indiquées, de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ de la formule (53) est exact ou non.

38. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ce point n'est pas celui sur lequel repose le raisonnement de Riemann. C'est la détermination du genre de $\xi(x)$ qui constitue la question essentielle et les recherches qui précèdent en donnent immédiatement la solution.

Nous avons, en effet, constaté que, en considérant toujours $\xi(x)$ comme fonction de x^2, son développement satisfait à la condition (8) avec $\alpha = 2 - \varepsilon$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Dès lors, les conclusions du n° **33** nous permettent d'affirmer la proposition suivante :

La fonction $\xi(x)$ (considérée comme fonction de x^2) est de genre zéro.

Elle s'exprime par le produit de facteurs primaires et d'une simple constante, sans aucun facteur exponentiel.

C'est le résultat que nous nous proposions d'établir.

D